Chapitre premier
$\mathbb{R}$, ordre, intervalles

1.1 Définitions et rappels

Définition 1.1.1. *Un entier naturel est un nombre positif ou nul permettant de dénombrer des objets comptant chacun pour un. Un nombre entier s'écrit dans le système décimal, avec une suite finie de chiffres de* 0 *à* 9*, sans signe et sans virgule. L'ensemble des nombres entiers naturels est noté* $\mathbb{N}$.

Propriété 1.1.2. *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *est muni de deux lois, l'addition, notée* $+$ *et la multiplication, notée* $\cdot$*, qui vérifient les propriétés élémentaires suivantes, pour tous entiers* m, n, p *:*

i) Pour l'addition :

- *Associativité :* $m + (n + p) = (m + n) + p$ *;*
- *Elément nul :* $n + 0 = 0 + n = n$ *;*
- *Commutativité :* $m + n = n + m$ *;*

ii) Pour la multiplication :

- *Associativité :* $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ *;*
- *Elément unité :* $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$ *;*
- *Distributivité par rapport à l'addition :* $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ *;*
- *Commutativité :* $m \cdot n = n \cdot m$.

Proposition 1.1.3. *Division euclidienne dans* $\mathbb{N}$
Etant donné deux entiers naturels a *et* b *avec* $b \neq 0$*, il existe un couple unique d'entiers naturels* q *et* r *tels que*

$$a = bq + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leq r < b$$

Démonstration. Les deux entiers a et b étant donnés avec $b \neq 0$, on définit le sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ par :

$$E = \{k \in \mathbb{N} \mid kb \leq a\}$$

L'ensemble E est non vide puisqu'il contient 0 et est borné par a. Donc il admet un plus grand élément q. Alors, on a

$$qb \leq a \quad \text{et} \quad a < (q+1)b$$

En posant $r = a - qb$, on obtient bien $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

Montrons l'unicité du couple (p, q) par l'absurde : si (p, q) et (p', q') sont deux couples distincts vérifiant $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ et $a = bq' + r'$ avec $0 \leq r' < b$, alors en supposant par exemple $q > q'$, par soustraction, on obtient $b(q - q') = r' - r$.

Le nombre entier positif $b(q - q')$ est strictement plus grand que b alors que $r' - r$ est strictement plus petit que b. Ce n'est pas possible donc $q = q'$ et $r = r'$. $\square$

Définition 1.1.4. *Division*

i) On dit qu'un entier naturel n non nul divise un entier naturel m non nul s'il existe un entier naturel k tel que $m = kn$.

ii) On dit qu'un nombre entier naturel p est premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Notations 1.1.5. *Lorsqu'un qu'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ divise un entier $m \in \mathbb{N}^*$, on note*

$$n \mid m$$

La division euclidienne permet de définir le PGCD de deux entiers naturels :

Définition 1.1.6. *PGCD*

i) Le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de deux entiers non nuls a et b est le plus grand entier naturel qui divise à la fois a et b.

ii) On dit que a et b sont premiers entre eux si PGCD $(a, b) = 1$ *c'est-à-dire s'ils n'ont pas d'autre diviseur commun que 1.*

Définition 1.1.7. *Un entier relatif est un nombre entier muni d'un signe. L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$.*

Propriété 1.1.8. *Les lois d'addition et de multiplication des entiers naturels se prolongent à $\mathbb{Z}$, avec les mêmes propriétés, plus une propriété supplémentaire : Tout entier relatif p admet un opposé $-p$, tel que : $p + (-p) = (-p) + p = 0$.*

Théorème 1.1.9. *Théorème de Bézout.*
Les deux nombres entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs non nuls u et v tels que

$$au + bv = 1$$

La démonstration du théorème de Bézout est donnée en exercice (exercices 1.1 et 1.2).

Corollaire 1.1.10. *Théorème de Gauss.*
Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et c un entier relatif. Si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise c.

Démonstration. Si a et b sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout, 1.1.9, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. En multipliant cette égalité par c, on trouve : $acu + bcv = c$.
On sait que a divise bc donc a divise $acu + bcv$. Par suite a divise bien c. □

1.2 Les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Définition 1.2.1. *Un nombre x est rationnel s'il existe deux entiers relatifs p et q, avec $q \neq 0$, tels que $x = \dfrac{p}{q}$.*
On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Définition 1.2.2. *La représentation d'un nombre rationnel $x = \dfrac{p}{q} \neq 0$, avec $q > 0$ est dite irréductible si*
- lorsque $p > 0$, PGCD $(p, q) = 1$
- lorsque $p < 0$, PGCD $(-p, q) = 1$.

Proposition 1.2.3. *La représentation irréductible d'un nombre rationnel non nul est unique.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut considérer le cas d'un nombre rationnel positif, le cas négatif se traitant de la même façon.
Supposons qu'on ait deux représentations irréductibles d'un nombre rationnel $x > 0$, soit $x = \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_2}{q_2}$ où p_1, p_2, q_1, q_2 sont des entiers naturels non nuls.
Alors $p_1 q_2 = p_2 q_1$.

Puisque p_1 est premier avec q_1, le théorème de Gauss, 1.1.10, implique que p_1 divise p_2. De la même façon, p_2 divise p_1 et donc ils sont égaux.
Par suite, on a aussi $q_1 = q_2$. On a donc bien l'unicité de la représentation irréductible de x. □

Remarque. Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, par exemple un nombre x tel que $x^2 = 2$.
En effet, supposons au contraire que le nombre rationnel $x = \dfrac{p}{q}$ sous forme irréductible, vérifie $x^2 = \dfrac{p^2}{q^2} = 2$.

Alors, en multipliant par q^2, on obtient $p^2 = 2q^2$. Cette deuxième équation implique que p^2 est pair et donc p également. Puisque p et q sont premiers entre eux, q est impair. Mais 4 divise p^2 donc 2 divise q^2 ce qui n'est pas possible puisque q est impair et donc q^2 aussi.
Donc x n'est pas rationnel.

Définition 1.2.4. *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est défini par la droite réelle : étant donné une origine, un sens et une unité de longueur, à tout point de la droite réelle, on associe un nombre réel x. La valeur x représente la distance du point à l'origine si $x > 0$ et son opposée si $x < 0$.*

Définition 1.2.5. *On appelle irrationnels les nombres réels qui ne sont pas rationnels. On note $\mathbb{I}$ l'ensemble des nombres irrationnels.*
L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est la réunion de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{I}$, soit $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Théorème 1.2.6. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps commutatif admettant $\mathbb{Q}$ comme sous-corps.*

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de deux lois internes, l'addition, notée $+$ et la multiplication, notée $\cdot$ ou $\times$, qui lui donnent une structure de corps, c'est-à-dire qui vérifie les axiomes :

$\star$ $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif :
- Associativité : pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$
- Existence d'un élément nul, noté 0 : pour tout x dans $\mathbb{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$
- Existence d'un opposé : pour tout x dans $\mathbb{R}$, $x + (-x) = (-x) + x = 0$
- Commutativité : pour tous x, y dans $\mathbb{R}$, $x + y = y + x$.

$\star$ $(\mathbb{R}, \cdot)$ vérifie :
- Associativité : pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- Existence d'un élément unité, noté 1 : pour tout x dans $\mathbb{R}$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
- Existence d'un inverse pour les réels non nuls :
  pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}$, $x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot x = 1$
- Distributivité par rapport à l'addition :
  pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

- Commutativité : pour tous x, y dans $\mathbb{R}$, $x \cdot y = y \cdot x$.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ car les opérations $+$ et $\cdot$ de $\mathbb{R}$ restreintes à $\mathbb{Q}$ sont des opérations internes à $\mathbb{Q}$. Ceci veut dire que l'addition et la multiplication de nombres rationnels sont des nombres rationnels.

1.3 L'ordre sur $\mathbb{R}$

Proposition 1.3.1. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné. L'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible avec la structure de corps.*

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'un ordre total, noté $\leq$, qui vérifie les axiomes :
- Reflexivité : pour tout x dans $\mathbb{R}$, $x \leq x$
- Antisymétrie : pour tous x, y dans $\mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent $x = y$
- Transitivité : pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$

L'ordre est total veut dire que :
- si x et y sont deux réels, alors ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$.

L'ordre est comptatible avec la structure de corps veut dire que :
- pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, $x \leq y \iff x + z \leq y + z$
- pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, $z > 0$, $x \leq y \iff x \cdot z \leq y \cdot z$

Cette relation d'ordre total prolonge celle de $\mathbb{Q}$.

Remarque. Les axiomes de la relation d'ordre impliquent en particulier que, pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ tels que $0 < x \leq y$, alors $-y \leq -x < 0$ et $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.

Notations 1.3.2. *Soient x et y deux nombres réels.*

i) *Si $x \leq y$ et $x \neq y$, on note $x < y$.*
ii) *La propriété $x \leq y$ se note également $y \geq x$.*
iii) *Si $x \geq y$ et $x \neq y$, on note $x > y$.*

Définition 1.3.3. *La valeur absolue d'un nombre réel x est $|x| = \max(x, -x)$.*

Proposition 1.3.4. *Les propriétés de la valeur absolue sont :*

i) $|x| \geq 0$
ii) $|x| = 0 \iff x = 0$
iii) $|xy| = |x||y|$
iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Inégalité triangulaire)*

Démonstration. Les trois premiers alinéas sont évidents. Montrons le *iv)*, en distinguant deux cas.

-Si x et y sont de même signe.
Alors $|x+y| = x+y$ s'ils sont positifs ou $|x+y| = -x-y$ s'ils sont négatifs. De même, $|x|+|y| = x+y$ s'ils sont positifs ou $|x|+|y| = -x-y$ s'ils sont négatifs. D'où l'égalité $|x+y| = |x|+|y|$.

–Si x et y sont de signe contraire, par exemple $x \leq 0$ et $y \geq 0$.
Alors $|x+y| = x+y$ si $y \geq -x$ et $|x+y| = -x-y$ si $y \leq -x$.
D'autre part, $|x|+|y| = -x+y$.
Or comme $x \leq 0$, $x+y \leq -x+y$ et comme $y \geq 0$, alors $-x-y \leq -x+y$.
Dans les deux cas, on a bien $|x+y| \leq |x|+|y|$.

On peut remarquer que l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si x et y sont de même signe. □

Corollaire 1.3.5. *Si x et y sont deux nombres réels, alors :*

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$$

Démonstration. Ce résultat est une conséqunce de l'inégalié triangulaire : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on applique cette inégalité avec $a = x-y$ et $b = y$.
Alors, $|x| \leq |x-y|+|y|$, soit

$$|x|-|y| \leq |x-y|$$

On applique à nouveau l'inégalité triangulaire avec $a = y-x$ et $b = x$.
Alors, $|y| \leq |y-x|+|x|$, soit

$$|y|-|x| \leq |x-y|$$

Ces deux inégalités impliquent bien

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$$

□

Définition 1.3.6. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :*

i) Le nombre réel M est un majorant de A si tout élément de A est inférieur ou égal à M.

ii) Le nombre réel m est un minorant de A si tout élément de A est *supérieur ou égal à m.*

iii) L'ensemble A est majoré (ou borné supérieurement) s'il possède au moins un majorant.

iv) L'ensemble A est minoré (ou borné inférieurement) s'il possède au moins un minorant.

v) L'ensemble A est borné s'il est majoré et minoré.

Définition 1.3.7. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

i) Un réel a est le plus grand élément (ou maximum) de A si a appartient à A et est un majorant de A. On note $a = \max A$.

ii) Un réel b est le plus petit élément (ou minimum) de A si b appartient à A et est un minorant de A. On note $b = \min A$.

Toute partie bornée de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit et un plus grand élément. En revanche, une partie bornée de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{Q}$ n'a pas forcément de plus petit ou plus grand élément.
Par exemple, la partie $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ n'a pas de plus grand élément car le seul candidat possible est 0 et $0 \notin \mathbb{R}_+^*$.
En revanche, on a :

Proposition 1.3.8. *Si une partie A admet un plus grand (respectivement plus petit) élément, alors il est unique.*

Démonstration. Supposons qu'une partie A admette deux plus grands éléments a_1 et a_2. Alors tout élément $a \in A$ est inférieur ou égal à a_1. En particulier, puisque $a_2 \in A$, $a_2 \leq a_1$.
De même, tout élément $a \in A$ est inférieur ou égal à a_2. En particulier, puisque $a_1 \in A$, $a_1 \leq a_2$. D'où $a_1 = a_2$. $\square$

A défaut d'un plus petit ou d'un plus grand élément, on a une autre définition, dont l'intérêt est décrit dans le théorème 1.3.11 qui suit et qui est l'une des principales qualités de $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.9. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

i) Un nombre réel a est la borne supérieure de A si a est le plus petit majorant de A. On note $a = \sup A$.

ii) Un nombre réel b est la borne inférieure de A si b est le plus grand minorant de A. On note $b = \inf A$.

La proposition 1.3.8 implique que si la borne supérieure (respectivement inférieure) d'un ensemble existe, alors elle est unique.

Proposition 1.3.10. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

i) Un nombre réel a est la borne supérieure de A si et seulement si pour tout $x \in A$, $x \leq a$ et pour tout $a' < a$, il existe $x \in A$ tel que $a' < x$.

ii) Un nombre réel b est la borne inférieure de A si et seulement si pour tout $x \in A$, $x \geq b$ et pour tout $b' > b$, il existe $x \in A$ tel que $b' > x$.

Démonstration. Les deux assertions se démontrent de la même façon, montrons par exemple le *i)* : dire que $a = \sup\ A$ c'est dire que :
- a est un majorant de A, ce qui s'exprime par $x \leq a$ pour tout $x \in A$
- a est le plus petit majorant, ce qui veut dire que si on prend un nombre a' strictement plus petit que a, ce n'est plus un majorant de A, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $a' < x$. □

Théorème 1.3.11. *Théorème de la borne supérieure (admis).*
Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Proposition 1.3.12.

i) Si une partie A de $\mathbb{R}$ a un maximum a, alors a est la borne supérieure de cette partie.

ii) De même, si la partie A a un minimum b, alors b est la borne inférieure de cette partie.

Démonstration. Montrons le *i)*, le cas du minimum se traitant de la même façon.
Si A admet un maximum a, celui-ci est par définition le plus grand élément de A. C'est donc un majorant de A et c'est le plus petit des majorants de A car il appartient à la partie A. C'est donc la borne supérieure de A. □

Par contre, il existe des ensembles ayant des bornes supérieures ou inférieures mais qui n'ont pas de maximum ou de minimum. Montrons le par deux exemples.

Exemple 1.3.13.

1) L'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet 0 comme borne inférieure et 1 comme borne supérieure, qui est aussi son maximum. L'ensemble A n'admet pas de minimum.

2) L'ensemble $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ admet $\sqrt{2}$ comme borne supérieure et $-\sqrt{2}$ comme borne inférieure. L'ensemble B n'admet ni maximum ni minimum.

On peut remarquer que le deuxième exemple montre aussi que l'ensemble des rationnels ne possède pas la propriété dite de la borne supérieure, c'est-à-dire