Préface

De toutes les disciplines reliées à la physique, la mécanique est probablement celle qui nous est la plus familière. Archimède flottant dans son bain, Newton regardant tomber une pomme, Galilée s'exclamant « et pourtant elle tourne » sont devenus des personnages universels et chacun d'entre nous, au delà du formalisme et des équations, peut apprécier leur contribution. « La loi de la pesanteur est dure, mais c'est la loi », chantait Brassens, désignant ainsi une discipline qui a réussi à quitter son environnement purement scientifique pour être assimilée par tous comme une règle naturelle et fondamentale.

Mais comment savoir si l'on comprend vraiment la mécanique ? Les principes de base s'énoncent en quelques lignes, et sont d'une simplicité remarquable. Pourtant leur champ d'application est immense, depuis le mouvement des molécules d'un gaz jusqu'à la dynamique des galaxies. Pour maîtriser la mécanique dans sa diversité, il faut donc l'utiliser ; en termes scolaires, il faut résoudre des exercices. Mais lesquels choisir ? Face aux problèmes traditionnels, le jugement des élèves est souvent sans appel : « trop calculatoire ! ». Pourtant, l'examinateur a fait un effort méritoire en ajoutant un « Interpréter physiquement le résultat obtenu » en toute dernière question d'un exercice où les candidats ont dû aligner plusieurs dizaines d'équations. Mais les hypothétiques cônes roulant à l'intérieur de cylindres eux-mêmes en train de vibrer restent malgré tout bien rébarbatifs.

Les thèmes de réflexion que nous proposent D. Guéry-Odelin et T. Lahaye sont aux antipodes de ces problèmes stéréotypés. On y rencontre des particules, des atomes, des planètes évoluant dans des champs de forces simples comme la gravité ou la répulsion coulombienne. Pour chaque nouveau texte, les auteurs partent d'un problème physique bien identifié, en guidant le lecteur par quelques ordres de grandeur. Bien sûr les calculs ne sont pas absents — l'étude de la stabilité des points de Lagrange ne se fait pas sans souffrir un peu —, mais ils ne sont jamais gratuits. Et surtout les auteurs montrent un plaisir jubilatoire à faire découvrir au lecteur des aspects cachés ou non intuitifs de la mécanique d'objets simples : une bille peut rester en équilibre stable sur une selle de cheval, des atomes peuvent être refroidis quand on les éclaire, un mouvement sans dissipation peut exister en présence de forces de frottement, etc.

La mécanique est une science vivante. Nombre des problèmes posés dans cet ouvrage font référence à des découvertes des vingt dernières années. Le lecteur apprendra ainsi la mécanique à son meilleur niveau, ce qui est important pour ses examens et concours proches, et il comprendra également, par petites touches, certains aspects de la recherche en physique moderne, ce qui est peut-être encore plus important pour sa future carrière. Les deux auteurs ont pu atteindre ce double but car ils sont à la fois enseignants et acteurs de cette science. Plusieurs des problèmes posés ici font référence à leur domaine de recherche, et certains sont même directement tirés de leurs propres travaux. J'espère très sincèrement que le soin et la passion que D. Guéry-Odelin et T. Lahaye ont mis dans la préparation de cet ouvrage donneront au lecteur la curiosité d'en savoir plus, et lui enseigneront le plaisir de comprendre, au-delà du formalisme, comment émergent de nouveaux phénomènes physiques.

Jean Dalibard
Directeur de recherche au CNRS
Professeur à l'École polytechnique

Avant-propos

DANS NOMBRE de domaines de recherche, fondamentale comme appliquée, la mécanique classique joue encore aujourd'hui un rôle clé. Cependant, son enseignement dans sa forme la plus traditionnelle confine trop souvent les applications aux sempiternels ressorts, pendules, et autres manèges en rotation. Aussi, cet ouvrage propose d'illustrer la mécanique classique par des exemples issus de la physique *contemporaine*. Les exercices que nous avons rassemblés sont issus de notre expérience d'enseignement : cours, travaux dirigés, « colles » dans les classes préparatoires aux grandes écoles et rédaction de sujets de concours.

Le public visé par ce livre est triple. D'une part, les étudiants se préparant aux concours des Grandes Écoles d'ingénieurs et des Écoles Normales Supérieures pourront l'utiliser pour se préparer aux écrits et aux oraux. D'autre part, les étudiants en Licence à l'université (du niveau L1 à L3) pourront s'en servir pour vérifier leur assimilation du cours, tout en se forgeant un socle de connaissances qui leur servira dans la suite de leur cursus. Enfin, les candidats aux concours d'enseignement (CAPES et Agrégation de physique) y trouveront matière à réviser les bases de la mécanique classique, et à faire le lien avec certains concepts de physique moderne au niveau L3 et M1 (mécanique statistique, mécanique quantique, relativité restreinte). Nous espérons que cet ouvrage contribuera à élargir la culture générale en physique des lecteurs.

Nous avons choisi d'indiquer le niveau de difficulté des exercices. Les plus faciles (*) pourront être traités dès la première année d'enseignement supérieur. Ceux de difficulté intermédiaire (**) requièrent une meilleure maîtrise du cours. Quelques exercices (***) sont un peu plus techniques. Loin de vouloir décourager les lecteurs, nous souhaitons les inciter à travailler ces problèmes avec l'aide des corrigés pour élargir le champ de leurs connaissances. Quelques exercices concernent la dynamique relativiste.

Les thèmes choisis reflètent bien entendu nos goûts personnels, et sont inspirés pour bon nombre d'entre eux par notre domaine de recherche (en particulier pour le thème n° 9...), mais également par nos discussions avec des collègues, ou par nos lectures. Ils offrent un aperçu, certes limité, de quelques applications de la mécanique classique à la physique moderne. Les problèmes sont tous indépendants ; cependant, nous avons mis en exergue dans les corrigés les liens entre exercices traitant de sujets connexes.

L'accent est mis également sur les applications concrètes (c'est-à-dire calculs de valeurs numériques, estimations d'ordres de grandeurs, interprétations de données expérimentales) afin d'insister sur le caractère expérimental de la physique, qui est souvent perçue par les étudiants comme bien trop abstraite. Dans le même ordre d'idées, un certain nombre de suggestions de lecture sont données à la fin des corrigés. Nous espérons que cet aspect de l'ouvrage renforcera chez certains de nos lecteurs leur goût pour la physique.

Nous tenons à remercier pour finir l'ensemble des personnes qui ont contribué au succès de la rédaction de cet ouvrage : elles se reconnaîtront... Il est possible que quelques coquilles subsistent. Les lecteurs qui en remarqueraient sont invités à nous les signaler en envoyant un courrier électronique à l'adresse `dgo@irsamc.ups-tlse.fr` ; nous les en remercions par avance.

Les auteurs

Thème 1

Ordres de grandeur et analyse dimensionnelle

La goutte est donc aplatie par une force de l'ordre (situation peu enviable, d'être aplatie par une force de l'ordre) de $\rho V^2 Rh$.

Étienne Reyssat, *thèse de doctorat de l'Université Paris 7.*

1.1 Quelques ordres de grandeur *

Il est important, lorsqu'on résout un problème de physique, de s'appuyer sur l'intuition, pour pouvoir, par exemple, déterminer de quelles données du problème dépend une quantité physique inconnue, ou encore de se faire une idée, avant tout calcul, de l'ordre de grandeur numérique du résultat. Pour développer cette intuition physique, il est indispensable de connaître, pour chaque grandeur physique, les ordres de grandeurs des valeurs numériques typiques d'un certain nombre de systèmes. Cela permet en particulier de détecter des erreurs manifestes quand on fait une application numérique.

Dans le petit exercice qui suit, on demande donc, pour les grandeurs physiques les plus courantes (longueurs, masses, temps, vitesses, énergies,...) des ordres de grandeurs typiques pour quelques systèmes importants.

Constantes universelles

1. Quelle est la valeur numérique de la constante de gravitation universelle G ?
2. Quelle est la valeur numérique de la constante de Coulomb $1/4\pi\varepsilon_0$?

3. Quelle est la valeur numérique de la perméabilité du vide μ_0 ?
4. Quelle est la valeur numérique de la constante de Planck h ?
5. Quelle est la valeur numérique de la constante de Boltzmann k_B ?
6. Quelle est la valeur numérique de la constante des gaz parfaits R ?
7. Quelle est la valeur numérique du nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_\mathrm{A}$?

Longueurs

1. Quelle est la taille typique d'un noyau atomique ?
2. Quelle est la taille typique d'un atome ?
3. À quel domaine de longueurs d'onde appartient le domaine visible ?
4. Que vaut le rayon de la Terre ?
5. Quelle est la distance Terre-Lune ?
6. Quelle est la distance Terre-Soleil ?

Masses

1. Quelle est la masse d'un électron ?
2. Quelle est la masse d'un proton, d'un neutron ?
3. Quelle est la masse de la Terre ?
4. Quelle est la masse du Soleil ?

Masses volumiques

1. Quelle est la masse volumique de l'eau ?
2. Quelle est l'ordre de grandeur de la masse volumique d'un métal usuel ?
3. Quelle est la masse volumique de l'air dans les conditions normales de température et de pression ?

Temps

1. Quelle est la durée du jour en secondes ?
2. Quelle est la durée d'une année en secondes ?

Fréquences

1. Quel est le domaine de fréquence des ondes électromagnétiques correspondant à la lumière visible ?

2. Quelle est la fréquence des ondes électromagnétiques utilisées dans un four à micro-ondes ?
3. Quel est le domaine de fréquences des ondes radio ?
4. À quel domaine de fréquences correspondent les ondes sonores ?

Vitesses

1. Quelle est la vitesse typique d'un satellite en orbite basse autour de la Terre ?
2. Quelle est la vitesse du son dans l'air ?
3. Quelle est la vitesse de la lumière dans le vide ?

Énergies

1. Quel est l'ordre de grandeur typique d'une énergie de liaison moléculaire ?
2. Quelle est l'énergie typique d'un atome d'un gaz parfait monoatomique à la température T ?
3. Quelle énergie est nécessaire pour augmenter d'un degré Celsius la température d'un gramme d'eau ?

Puissances

1. Quelle est la puissance typique d'une lampe d'éclairage ?
2. Quelle est la puissance typique d'une automobile ?
3. Quelle est la puissance typique d'une centrale électrique nucléaire ? Et d'une éolienne ?
4. Quelle est la puissance moyenne d'un être humain en vie ?

Corrigé

Constantes universelles

1. La constante de gravitation universelle G vaut environ $6,67 \times 10^{-11}$ SI.
2. $1/4\pi\varepsilon_0 \simeq 9 \times 10^9$ SI.
3. Par définition $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ SI. Notons que l'on a la relation exacte $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$. Comme μ_0 et c ont une valeur *exacte* fixée, ε_0 aussi.
4. La constante de Planck vaut approximativement $6,63 \times 10^{-34}$ J·s. On utilise souvent la *constante de Planck réduite* $\hbar \equiv h/2\pi \simeq 1,05 \times 10^{-34}$ J·s.

5. La constante de Boltzmann k_B est environ égale à $1,38 \times 10^{-23}$ J·K^{-1}.
6. La constante des gaz parfaits vaut $R \simeq 8,314$ J · K^{-1} · mol^{-1}.
7. On a $\mathcal{N}_\mathrm{A} \simeq 6,022 \times 10^{23}$ mol^{-1}.

Longueurs

1. La taille typique d'un noyau atomique est de l'ordre du femtomètre (1 fm = 10^{-15} m), unité aussi appelée fermi en hommage à Enrico Fermi.
2. La taille typique d'un atome est de l'ordre de 10^{-10} m, soit un Angstrom (Å). Plus précisément, le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène est $a_0 = 0,53$ Å.
3. Le spectre visible s'étend du violet au rouge, soit de 400 à 800 nm environ.
4. Le rayon de la Terre est de l'ordre de 6400 km, soit une circonférence d'environ 40000 km (la première définition du mètre, datant de la révolution française, est en effet « la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre ».)
5. La distance Terre-Lune vaut environ 384000 km, c'est-à-dire un peu plus qu'une seconde-lumière.
6. La distance Terre-Soleil (qui définit ce que l'on appelle l'*unité astronomique*) vaut environ 150 millions de kilomètres (soit environ 8 minutes-lumière).

Masses

1. La masse d'un électron est $m_\mathrm{e} \simeq 9,1 \times 10^{-31}$ kg. On pourra retenir aussi sa valeur en énergie (via la relation $E = mc^2$), qui est de 511 keV (rappelons que 1 eV = $1,6 \times 10^{-19}$ J).
2. Le neutron et le proton ont pratiquement la même masse, de l'ordre de $1,67 \times 10^{-27}$ kg, soit 938 MeV. Le proton est environ 1836 fois plus massif que l'électron. Le neutron est en réalité très légèrement plus massif que le proton, ce qui autorise au point de vue énergétique la désintégration β du neutron libre en un proton, un électron et un antineutrino.
3. La masse de la Terre est d'environ 6×10^{24} kg.
4. La masse du Soleil est d'environ 2×10^{30} kg.

Masses volumiques

1. La masse volumique de l'eau est de 1000 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
2. La masse volumique du fer, par exemple, est de 7900 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, celle du cuivre de 8900 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Certains métaux comme les alcalins ont une masse volumique très faible (comme le lithium, 530 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$). La masse volumique du mercure est de 13600 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, celle du platine (utilisé avec l'iridium pour la réalisation du kilogramme étalon) est de 21000 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
3. La masse volumique de l'air dans les conditions normales de température (273 K) et de pression (1013 hPa) vaut
$$\rho = \frac{PM}{RT} \simeq 1,3 \ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \,.$$

Temps

1. Le jour solaire de 24 heures compte $24 \times 3600 = 86400$ s. Le jour sidéral a, lui, une durée de 86164 s.
2. Une année vaut 365,25 jours, soit environ 30 millions de secondes.

Fréquences

1. Le domaine visible correspond à des fréquences s'étalant de 4×10^{14} Hz (lumière rouge) à 8×10^{14} Hz (lumière violette).
2. Un four à micro-ondes utilise des ondes hyperfréquences à 2,45 GHz.
3. Pour la radio, on utilise des ondes de fréquence comprise entre 100 kHz (modulation d'amplitude) et 100 MHz (modulation de fréquence).
4. L'oreille humaine est sensible aux ondes sonores de fréquence comprise entre 20 Hz et 20 kHz.

Vitesses

1. Un satellite en orbite basse autour de la Terre a une vitesse de l'ordre de $\sqrt{GM_\text{T}/R_\text{T}}$, avec M_T la masse de la Terre et R_T le rayon terrestre. On trouve une vitesse de l'ordre de 8 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$. Il lui faut donc environ $40000/8 \simeq 5000$ s, soit un peu plus d'une heure, pour effectuer le tour de la Terre.
2. La vitesse du son dans l'air, à la température ambiante, vaut environ 340 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour un gaz de masse molaire M, à la température T, on a $c_\text{son} = \sqrt{\gamma RT/M}$, où R est la constante des gaz parfaits et γ est le rapport des capacités calorifiques à pression constante et à volume constant ($\gamma = 1,4$ pour un gaz diatomique).

3. La vitesse de la lumière dans le vide a une valeur constante, égale *par définition* à 299792458 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (ce qui permet ensuite de définir le mètre). On retiendra $c \simeq 3 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Énergies

1. Les énergies de liaison moléculaire sont de l'ordre de quelques électronvolts ($1\,\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}$ J).
2. L'énergie typique d'un atome d'un gaz parfait monoatomique à la température T vaut $3k_\text{B}T/2$, soit, pour $T = 300$ K, de l'ordre de 6×10^{-21} J.
3. L'énergie nécessaire pour augmenter d'un degré Celsius la température d'un gramme d'eau est ce qui définit la calorie, et vaut 4,18 J.

Puissances

1. Une lampe à incandescence d'éclairage a une puissance typique de quelques dizaines de watts.
2. La puissance des automobiles est encore aujourd'hui mesurée en *chevaux* ; or un cheval-vapeur correspond à 736 W. Une voiture de 100 chevaux (assez puissante donc) a ainsi une puissance de 74 kW.
3. Une centrale nucléaire a une puissance de l'ordre de 100 à 1000 MW. Une éolienne a une puissance typique de l'ordre de 1 MW.
4. On sait qu'un être humain doit consommer environ 2000 kilocalories par jour. Comme une kilocalorie correspond à 4,18 kJ, la puissance moyenne dissipée par un être humain est

   $$P \simeq \frac{2 \times 10^3 \times 4,18 \times 10^3}{24 \times 3600} \simeq 100 \text{ W}.$$

   En plein effort physique, la puissance instantanée peut atteindre plusieurs kW.

1.2 Analyse dimensionnelle *

Dans cet exercice, on met en œuvre sur quelques exemples simples l'analyse dimensionnelle, qui permet d'obtenir sans aucun calcul le résultat d'un problème physique, en construisant à partir des paramètres pertinents du problème une combinaison de ces paramètres ayant la dimension (longueur, masse, temps...) du résultat cherché [1]. Dans des situations où le nombre de paramètres est restreint, il apparaît souvent qu'une seule combinaison a la dimension du résultat cherché ; on obtient ainsi le résultat, à un facteur numérique sans dimension près (souvent proche de l'unité). Pour les applications numériques, on utilisera les valeurs rappelées dans le corrigé de l'exercice 1.1.

Chute libre. Une particule de masse m tombe d'une hauteur ℓ, sans vitesse initiale, dans le champ de pesanteur g. Quel est le temps de chute ?

Rayon classique de l'électron. On suppose que l'électron (masse m_e, charge q_e) peut être décrit par une distribution de charge sphérique, de rayon r_e. Dans le cadre d'une théorie classique (non quantique) mais relativiste, calculer r_e. Application numérique et commentaire.

Rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène. Peut-on trouver, par analyse dimensionnelle, la taille typique de l'orbite d'un électron autour d'un proton, dans le cadre de la mécanique classique ? Pourquoi ? Montrer que l'introduction, en mécanique quantique, de la constante de Planck réduite $\hbar$ permet d'obtenir la taille caractéristique de l'orbite (on rappelle que la constante de Planck a la dimension d'une *action*, c'est-à-dire d'une énergie multipliée par un temps, ou encore, d'un moment cinétique).

Fréquence plasma. On considère un ensemble d'électrons (de densité volumique n) mobiles dans une matrice d'ions immobiles, de sorte que l'ensemble est neutre. Trouver par analyse dimensionnelle l'expression de la fréquence caractéristique des oscillations de ce plasma électronique.

Formule de Stokes. Trouver par analyse dimensionnelle l'expression de la force de frottement exercée par un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ sur une sphère de rayon R, se déplaçant à vitesse v dans le fluide. On rappelle que le *coefficient de viscosité dynamique* η a la dimension d'une pression divisée par un gradient (spatial) de vitesse. La solution est-elle unique ? On lèvera l'ambiguïté en supposant que la force est proportion-

1. Il est possible de formaliser l'analyse dimensionnelle grâce au théorème dit « théorème π » : E. Buckingham, *On physically similar systems : Illustrations of the use of dimensional analysis*, Phys. Rev. **4**, 345 (1914).

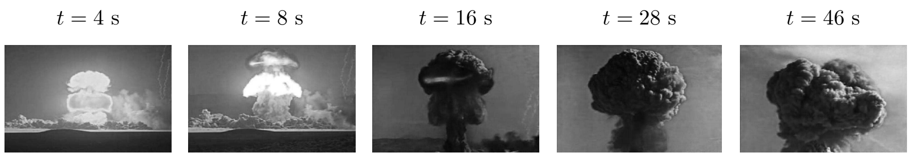

FIGURE 1.2.1 – *Explosion d'une bombe nucléaire américaine en 1953. Le temps indiqué correspond à l'intervalle écoulé depuis l'explosion. L'échelle spatiale est la même pour toutes les photographies (4 km × 2,5 km).*

nelle à la vitesse.

Énergie d'une explosion nucléaire. Dans les années cinquante, l'énergie dégagée par une explosion nucléaire était une information classée « confidentiel défense ». Cependant, des films montrant l'expansion du fameux « champignon nucléaire » furent diffusés par les militaires pour le grand public. Le physicien G. I. Taylor en déduisit l'énergie dégagée par l'explosion, en faisant l'hypothèse que le rayon R du nuage ne dépendait que du temps t écoulé depuis l'explosion, de l'énergie E dégagée par celle-ci, et de la densité volumique ϱ de l'air environnant. Montrer qu'alors $R \sim t^\beta$ où β est un exposant dont on donnera la valeur, et qu'en mesurant $R(t)$ on peut déduire E. La figure 1.2.1 présente une série de photographies d'une explosion thermonucléaire, prise à différents temps t après l'explosion. La loi $R(t)$ obtenue par analyse dimensionnelle est-elle confirmée par cette série d'images ?

Corrigé

Dans toute la suite, on note $[A]$ la dimension d'une grandeur physique A. Rappelons que les trois dimensions fondamentales en mécanique sont la longueur, notée L, la masse, notée M, et le temps T. Ainsi, l'équation $[v] = L \cdot T^{-1}$ signifie-t-elle que la vitesse v a la dimension d'une longueur divisée par un temps.

Chute libre. On cherche une expression de la forme $t \sim m^\alpha g^\beta \ell^\gamma$ pour le temps de chute, ce qui donne l'équation aux dimensions

$$T = M^\alpha (L \cdot T^{-2})^\beta L^\gamma$$

soit, par identification, $\alpha = 0$, $\beta + \gamma = 0$, et $-2\beta = 1$. Ce système se résout aisément en $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, -1/2, 1/2)$, et le temps de chute libre est donc $t \sim \sqrt{\ell/g}$, ce qui est le résultat bien connu, à un facteur $\sqrt{2}$ près.