

TABLE DES MATIÈRES

ALGÈBRE et GÉOMÉTRIE	5
Chapitre 1 - Algèbre linéaire Rappels et compléments	7
I- Espaces vectoriels	7
1- Familles libres, génératrices, bases	7
2- Somme de sous-espaces vectoriels	8
3- Noyau et image d'une application linéaire	10
4- Famille de projecteurs	10
5- Espaces vectoriels de dimension finie	12
6- Sous-espaces en dimension finie	13
II- Applications linéaires	13
1- Bases et applications linéaires	14
2- Rang d'une application linéaire	15
3- Polynômes d'interpolation de Lagrange	17
Exercices	19
Corrections	21
Chapitre 2 - Matrices	29
I- Généralités sur les matrices	29
1- Structure de l'ensemble des matrices	29
2- Opérations par blocs	30
II- Matrices et applications linéaires	33
1- Matrice d'une application linéaire	33
2- Sous-espaces stables	35
3- Changement de bases	38
4- Trace	41
5- Rang d'une matrice	41
III- Opérations élémentaires	43
1- Matrices élémentaires	43
2- Opérations élémentaires sur les matrices	44
3- Méthode du pivot de Gauss	45
Exercices	47
Corrections	49
Chapitre 3 - Polynômes d'endomorphismes et de matrices	57
1- Idéaux de $K[X]$	57
2- Notions de polynômes d'endomorphismes	58
3- Structure de $K[u]$	59
4- Polynômes annulateurs de u	59
5- Premières propriétés	60
6- Théorème des noyaux dans un cas particuliers	61
Exercices	63
Corrections	66
Chapitre 4 - Dualité dans les espaces vectoriels	75
1- Formes linéaires et hyperplans de E	75
2- Bases duales de E	77
Exercices	80
Corrections	81

Chapitre 5 - Déterminants	87
I- Permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$	87
1- Généralités	87
2- Signature d'une permutation	89
II- Déterminants	90
1- Formes n-linéaires sur E	90
2- Déterminant d'un système de vecteurs	92
3- Déterminant d'un endomorphisme	92
4- Déterminant d'une matrice	93
5- Calcul des déterminants	95
6- Premières applications	97
Exercices	100
Corrections	102
Chapitre 6 - Réduction des endomorphismes et des matrices	109
I- Généralités	109
1- Éléments propres d'un endomorphisme	109
2- Éléments propres et polynômes	110
3- Propriétés des sous-espaces propres	111
4- Extension aux matrices	111
II- Cas de la dimension finie	113
1- Polynôme caractéristique	113
2- Stabilité et éléments propres	115
III- Diagonalisation	118
1- Endomorphismes diagonalisables	118
2- Matrices diagonalisables	119
3- Utilisation d'un polynôme annulateur	120
IV- Trigonalisation	121
V- Suites récurrentes linéaires	124
1- Structure de E	124
2- Équation caractéristique	124
3- Base et description de E	125
Exercices	129
Corrections	131
Chapitre 7 - Espaces préhilbertiens et euclidiens	143
I- Produit scalaire	143
1- Notion de produit scalaire	143
2- Norme euclidienne et hermitienne	146
3- Vecteurs orthogonaux - familles orthogonales	148
4- Inégalité de Cauchy-Schwarz	149
5- Expressions du produit scalaire	151
II- Projection orthogonale, distance	153
1- Orthogonal d'un sous-espace	153
2- Cas d'un sous-espace F de dimension finie	155
3- Existence de bases orthonormées	156
4- Projection orthogonale	156
5- Distance à un sous-espace	159
6- Méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	160
Exercices	164

Corrections	166
Chapitre 8 - Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien	175
I- Adjoint d'un endomorphisme	175
1- Définition	175
2- Propriétés élémentaires	176
II- Endomorphismes orthogonaux	177
1- Définitions, caractérisations	177
2- Matrices orthogonales	178
3- Propriétés spectrales	179
4- Description de $O(2)$ et $O(3)$	180
III- Endomorphismes symétriques	183
1- Définition, caractérisations	183
2- Réduction des endomorphismes symétriques	184
3- Application aux formes quadratiques	185
IV- Réduction des coniques	190
1- Définition, notations	190
2- Coniques à centre	190
3- Coniques du genre parabole	192
V- Classification des quadriques	193
1- Définition, notations	194
2- Quadriques à centre	194
3- Quadriques n'ayant pas de centre	196
VI- Produit mixte et produit vectoriel	199
1- Produit mixte de n vecteurs	199
2- Produit vectoriel de 2 vecteurs en dimension 3	201
Exercices	203
Corrections	205
Chapitre 9 - Arcs paramétrés	219
I- Arcs paramétrés	219
1- Définitions	219
2- Changement de paramètres admissibles	220
3- Entiers caractéristiques	221
4- Étude locale	224
5- Points biréguliers et points d'inflexion	225
6- Point multiple	226
7- Branches infinies	226
8- Plan d'étude d'une courbe paramétrée plane	228
II- Courbes en polaire	228
1- Définition et notation	228
2- Symétries et rotations	229
3- Tangentes	230
4- Point birégulier	231
5- Point multiple	232
6- Branches infinies	233
7- Plan d'étude d'une courbe en polaire	234
8- Exemples	234
III- Propriétés métriques des arcs	237
1- Longueur d'une courbe	237

2- Abscisse curviligne	237
3- Repère de Frenet	239
4- Paramètres angulaires	241
5- Calcul direct de la courbure	243
Exercices	244
Corrections	246
ANALYSE	261
Chapitre 1 - Rappels sur les suites numériques	263
1- Définition et propriétés algébriques	263
2- Suites réelles divergeant vers l'infini	264
3- Suites extraites	265
4- Propriétés des suites réelles liées à l'ordre	266
5- Suites monotones	267
6- Suites adjacentes	268
Exercices	269
Corrections	271
Chapitre 2 - Espaces Vectoriels Normés	283
I- Premières notions	283
1- Normes sur un espace vectoriel	283
2- Exemples	285
3- Boules, sphères, etc...	287
4- Normes équivalentes	289
II- Suites dans un evn	290
1- Notion de suites convergentes	290
2- Premières propriétés	291
3- Normes équivalentes et suites convergentes	292
4- Suites de Cauchy	294
5- Suites extraites	295
6- Suites composantes	295
7- Suites matricielles	296
III- Limites et continuité	297
1- Points intérieurs, points adhérents	297
2- Limite en un point adhérent	299
3- Continuité	301
IV- Applications linéaires continues	305
1- Continuité des applications linéaires	305
2- Normes subordonnées	306
3- Application aux matrices	308
4- Continuité des applications bilinéaires	309
V- Éléments de topologie	310
1- Ouverts, fermés	310
2- Compacité	312
Exercices	314
Corrections	316
Chapitre 3 - Séries numériques	329
I- Généralités	329
1- Définitions	329
2- Premiers exemples	330

3- Divergence grossière	332
4- Opérations algébriques	333
II- Séries à termes positifs	334
1- Théorèmes de comparaison	334
2- Règle de D'Alembert	336
3- Comparaison à une intégrale	337
4- Étude des séries de Riemann	339
III- Séries à termes quelconques	340
1- Critère de Cauchy	341
2- Convergence absolue	341
3- Étude des séries alternées	343
4- Formule de Stirling	345
5- Plan d'étude d'une série numérique	346
6- Série produit	346
Exercices	348
Corrections	350
Chapitre 4 - Suites et séries de fonctions	361
I- Convergence des suites de fonctions	361
1- Convergence simple	361
2- Convergence uniforme	363
3- Caractérisation de la convergence uniforme	364
4- Convergence uniforme sur tout segment	365
II- Propriétés de la limite uniforme	366
1- Continuité	367
2- Échange limite intégrale	368
3- Dérivabilité	371
III- Séries de fonctions	372
1- Convergence simple et convergence uniforme	373
2- Convergence normale	374
3- Cas des séries alternées	376
4- Continuité de la somme	377
5- Échange série-intégrale	378
6- Dérivabilité	380
Exercices	382
Corrections	384
Chapitre 5- Dérivation des fonctions vectorielles	397
I- Dérivée d'ordre 1	397
1- Dérivabilité en un point	397
2- Fonction dérivée	399
II- Dérivées d'ordre supérieur	401
1- Définitions et notations	401
2- Exemples usuels	402
3- Règles de calculs	403
4- C^n difféomorphisme.....	404
5- Fonctions de classe C^n par morceaux	404
Exercices	406
Corrections	407

Chapitre 6 - Intégration des fonctions vectorielles	413
I- Intégrale d'une fonction continue par morceaux	413
1- Approximation uniforme	413
2- Définition de l'intégrale	414
3- Propriétés de l'intégrale	416
4- Utilisation des composantes	418
5- Inégalités de la moyenne	419
6- Cas des fonctions réelles continues	420
7- Somme de Riemann	421
8- Généralisation de la notion d'intégrale	422
II- Intégrale dépendant de sa borne supérieure	423
1- Notion de primitive	423
2- Intégrale fonction de sa borne supérieure	423
3- Techniques de calcul	424
Exercices	427
Corrections	429
Chapitre 7 - Formules de Taylor	437
I- Inégalités des accroissements finis	437
1- Cas des fonctions vectorielles	437
2- Cas des fonctions réelles (rappels de 1 ^{re} année)	439
II- Formules de Taylor	441
1- Formule de Taylor avec reste "intégrale"	442
2- Inégalité de Taylor Lagrange	443
3- Formule de Taylor Young	444
Exercices	445
Corrections	447
Chapitre 8 - Intégration sur un intervalle quelconque	455
I- Intégrales convergentes	455
1- Définitions, premiers exemples	456
2- Cas d'un segment	461
3- Propriétés des intégrales convergentes	462
4- Techniques de calcul	465
II- Cas des fonctions positives	467
1- Théorèmes de comparaison	468
2- Caractérisations de la convergence	469
3- Propriétés de l'intégrale des fonctions positives	471
III- Absolue convergence	472
1- Définition et premières propriétés	472
2- Propriétés de l'intégrale des fonctions intégrables	474
3- Semi-convergence	474
4- Espaces vectoriels normés de fonctions intégrables	476
IV- Théorèmes de convergence	478
1- Théorème d'échange limite intégrale	478
2- Théorème d'échange série intégrale	479
V- Intégrales dépendant d'un paramètre	480
1- Théorème de continuité	481
2- Théorème de dérivabilité	482
Exercices	484

Corrections	486
Chapitre 9 - Séries entières	499
I- Rayon de convergence	499
1- Rayon de convergence	499
2- Lemme d'Abel	502
3- Comparaison et rayon de convergence	505
4- Règle de D'Alembert	506
5- Opérations algébriques	507
II- Propriétés de la somme	510
1- Étude de la convergence uniforme	511
2- Primitivation d'une série entière	513
3- Dérivation d'une série entière	514
III- Développement en série entière	515
1- Définitions - premières propriétés	516
2- Obtention par les formules de Taylor	517
3- Obtention par opérations algébriques	519
4- Obtention par primitivation	519
5- Obtention par dérivation	520
6- Obtention par la méthode de l'équation différentielle	521
Exercices	524
Corrections	526
Chapitre 10 - Séries de Fourier	535
I- Coefficients et séries de Fourier	535
1- Coefficients de Fourier	536
2- Régularité des coefficients de Fourier	537
3- Séries trigonométriques	539
4- Séries de Fourier	541
II- Étude quadratique des séries de Fourier	543
1- Polynômes trigonométriques	543
2- Interprétation des coefficients de Fourier	546
3- Convergence quadratique	547
4- Applications	549
III- Théorèmes de Dirichlet	549
1- Théorème de convergence simple	550
2- Théorème de convergence normale	551
Exercices	552
Corrections	554
Chapitre 11 - Équations différentielles	563
I- Systèmes différentiels linéaires du premier ordre	563
1- Introduction	564
2- Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire)	565
3- Étude de l'équation (H)	565
4- Étude de l'équation (E)	567
II- Cas des systèmes à coefficients constants	568
1- Premiers résultats	568
2- Méthodes pratiques	569
III- Équations différentielles linéaires d'ordre 2	570
1- Introduction	570

2- Système différentiel associé	570
3- Étude de S_H	572
4- Étude de S_E	574
IV- Notions sur les équations différentielles non linéaires	575
1- Introduction	575
2- Théorème de Cauchy-Lipschitz	576
Exercices	577
Corrections	579
Chapitre 12 - Calcul différentiel	593
I- Applications différentiables	593
1- Rappels et compléments sur la continuité	593
2- Différentiabilité	595
3- Dérivée suivant un vecteur	597
4- Dérivées partielles	598
5- Matrice jacobienne	600
II- Applications de classe C^1	603
1- Définition, caractérisation	603
2- Composition des applications de classe C^1	604
3- C^1 difféomorphisme	608
4- Accroissements finis	609
5- Extremum	610
III- Applications de classe C^k	613
1- Dérivées d'ordre supérieur	613
2- Propriétés des applications de classe C^k	614
3- C^k difféomorphisme	614
IV- Théorèmes des fonctions implicites et applications géométriques	615
1- Théorèmes des fonctions implicites	615
2- Notions élémentaires sur les surfaces	617
Exercices	621
Corrections	623
Chapitre 13 - Intégrales curvilignes et multiples	631
I- Formes différentielles de degré 1	631
II- Intégrales curvilignes	633
1- Définitions	633
2- Propriétés	635
III- Intégrales doubles	635
1- Définitions	635
2- Propriétés	636
3- Changement de variables	637
4- Formule de Green-Riemann	639
IV- Intégrales triples	639
1- Passage en coordonnées cylindriques	640
2- Passage en coordonnées sphériques	641
Exercices	642
Corrections	643
FORMULAIRES EN VRAC	651