Chapitre 1

Algèbre linéaire Rappels et compléments

Dans toute la suite E désigne un K-espace vectoriel où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

L'objectif de ce premier chapitre d'algèbre est de compléter les notions étudiées en 1ère année, notamment les notions de somme de plusieurs sous-espaces vectoriels et de projecteurs associés.
Les notions élémentaires d'espaces vectoriels, de sous-espaces vectoriels et d'applications linéaires sont supposées connues.

I- Espaces vectoriels

1- Familles libres, génératrices, bases

DEFINITION 1

Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une famille finie de E, on dit que cette famille est **libre dans E** si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in K^p, \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall i \in [\![1, p]\!] \ \lambda_i = 0 \right)$$

Dans le cas contraire, la famille est dite **liée**.

On retient :

1. qu'une famille formée par un seul vecteur est libre si et seulement si : ce vecteur est non nul,
2. qu'une famille formée par deux vecteurs est libre si et seulement si : ces vecteurs sont non colinéaires,
3. qu'une famille finie est liée si et seulement si : un des vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

DEFINITION 2

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de E indexée par un ensemble d'indices I quelconque, on dit que cette famille est **libre dans E** si et seulement si :

toute sous-famille **finie** de cette famille est libre dans E.

DEFINITION 3

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de E, on dit que cette famille est **<u>génératrice de E</u>** si et seulement si :

$$E = \mathrm{Vect}\left(\{e_i, i \in I\}\right)$$

Autrement dit si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire **d'un nombre fini** de vecteurs de cette famille.

DEFINITION 4

On dit que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est **<u>une base de E</u>** si et seulement si :

c'est une famille **libre et génératrice** de E.

2- Somme de sous-espaces vectoriels

$E_1, \cdots, E_p$ désignent p sous-espaces vectoriels de E.

DEFINITION 1

On appelle somme des sous-espaces vectoriels $E_1, \cdots, E_p$ et on note

$$\sum_{i=1}^{p} E_i$$

l'ensemble $\left\{x_1 + \cdots + x_p,\ \left(x_1, \cdots, x_p\right) \in E_1 x \cdots x E_p\right\}$

Propriété

$\sum_{i=1}^{p} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque

En fait $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est le sous-espace vectoriel engendré par* $\bigcup_{1\le i\le p} E_i$

Quand on décompose un vecteur sur une somme de sous-espaces vectoriels, la décomposition utilisée *n'est en général pas unique*, or il est fort utile d'avoir l'unicité de la décomposition, on introduit alors une notion plus précise :

DEFINITION 2

On dit que la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} E_i \quad \exists\ !\ \left(x_1, \cdots, x_p\right) \in E_1 x \cdots x E_p \ \ /\ \ x = x_1 + \cdots + x_p$$

Dans ce cas la somme est notée $\bigoplus_{1\le i\le p} E_i$

THÉORÈME

Soit $p \geq 2$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe,
2. $\forall (x_1, \cdots, x_p) \in E_1 x \cdots x E_p$,
$(x_1 + \cdots + x_p = 0) \Rightarrow (\forall i \in [\![1,p]\!] \ x_i = 0)$
(autrement dit le vecteur nul a une unique décomposition),
3. $\forall i \in [\![1,p]\!] \ E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{0\}$
4. $\forall i \in [\![1,p^{-1}]\!] \ E_i \cap \sum_{j=i+1}^{p} E_j = \{0\}$

Remarques

Pour $p = 2$, *on retiendra : F et G sont en somme directe si et seulement si :* $F \cap G = \{0\}$
Pour $p \geq 3$, *on utilisera l'unicité de la décomposition du vecteur nul.*

Corollaire

Si la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe, alors :
tout système $(x_1, \cdots, x_p) \in E_1 x \cdots x E_p$ formé de vecteurs non nuls est libre.

Proposition

Si $E = \underset{1 \leq i \leq p}{\oplus} E_i$ et $u \in L(E,F)$
il existe une unique famille d'applications linéaires $(u_1, \cdots, u_p)$ telle que :
$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $u_i \in L(E_i, F)$ et $u_i = u_{|E_i}$
Autrement dit, u est caractérisé par ses restrictions aux E_i.

Rappel

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$, alors on dit que F et G sont supplémentaires dans E.

Exemple

Soient $E = K[X]$, $n \in \mathbb{N}$ et $A \in K[X]$ / $\deg(A) = n+1$
si $F = \{P \in K[X] \ / \ A|P\}$
alors : $K[X] = F \oplus K_n[X]$

C'est une conséquence de la division euclidienne dans $K[X]$

3- Noyau et image d'une application linéaire

DEFINITION

Soit $u \in L(E,F)$,
on appelle **noyau de u** et on note $\mathrm{Ker}(u)$ l'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(u) = \{x \in E \ / \ u(x) = 0\}$$

on appelle **image de u** et on note $\mathrm{Im}(u)$ l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(u) = \{y \in F \ / \ \exists \ x \in E \ \text{tq} \ u(x) = y\} = \{ u(x) \ ; \ x \in E\}$$

Remarque $\mathrm{Ker}(u) \subseteq E$ et $\mathrm{Im}(u) \subseteq F$

Ce sont des sous-espaces respectivement de E et F.

L'injectivité et la surjectivité de u sont caractérisées à l'aide du noyau et de l'image :

Proposition 1

$$(u \ \text{injective}) \Leftrightarrow (\mathrm{Ker}(u) = \{0\})$$
$$(u \ \text{surjective}) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(u) = F)$$

On peut aussi préciser ces notions à l'aide de l'image d'une famille libre ou génératrice de E :

Proposition 2

Soit $u \in L(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E,

1. si $(e_i)_{i\in I}$ est libre et u injective, alors $(u(e_i))_{i\in I}$ est libre dans F,
2. si $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice, alors
(u surjective) $\Leftrightarrow$ ($(u(e_i))_{i\in I}$ est génératrice dans F).

Remarque *Dans le 1er cas, la réciproque est fausse.*

4- Famille de projecteurs

Rappel 1

On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E tel que : $pop = p$

THÉORÈME

Soit p un projecteur de E, alors :

1. $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id_E) = \{x \in E \ / \ p(x) = x\}$
2. $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$

Plus précisément, la décomposition d'un vecteur x de E sur $E = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p)$ est donnée par : $x = p(x) + (x - p(x))$

Pour le 2ème point, $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$, car

$$p(x - p(x)) = p(x) - pop(x) = 0_E$$

Rappel 2

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, alors la projection sur F parallèlement à G est un projecteur de E.
Réciproquement, un projecteur p de E est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$

Dans la suite de ce paragraphe, je vais généraliser cette notion au cas où E est somme directe d'une famille de sous-espaces vectoriels.

PROPOSITION 1
DEFINITION

Si $E = \bigoplus_{1 \le i \le p} E_i$ $\exists\,!(u_1, \cdots, u_p)$ famille de projecteurs de E telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \mathrm{Ker}\ u_i = \bigoplus_{\substack{1 \le j \le p \\ j \ne i}} E_j \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\ u_i = E_i$$

Cette famille est appelée famille de projecteurs associée à $E = \underset{1 \le i \le p}{\oplus} E_i$

Proposition 2

Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ la famille de projecteurs associée à $E = \underset{1 \le i \le p}{\oplus} E_i$

alors :

$$id_E = \sum_{i=1}^{p} u_i \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2 \quad (i \ne j) \Rightarrow (u_i o u_j = 0)$$

Dans le cas où $E = F \oplus G$, la famille de projecteurs associée est (p, q) où p est la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F.

Réciproque

Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille de projecteurs de E tels que :

$$id_E = \sum_{i=1}^{p} u_i \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2 \quad (i \ne j) \Rightarrow (u_i o u_j = 0), \text{ alors :}$$

1. $E = \underset{1 \le i \le p}{\oplus} \mathrm{Im}(u_i)$
2. $(u_1, \cdots, u_p)$ est la famille de projecteurs associés à $E = \underset{1 \le i \le p}{\oplus} \mathrm{Im}(u_i)$

5- Espaces vectoriels de dimension finie

Ici encore, je vais généraliser les résultats de 1ère année, en particulier en ce qui concerne la dimension d'une somme directe de plusieurs sous-espaces.

E désigne ici un Kev de dimension finie.

Rappel

Un espace vectoriel de **dimension finie** est un espace vectoriel admettant une famille génératrice **finie.**

Les théorèmes fondamentaux sont les suivants :

THÉORÈME 1

Tout espace vectoriel de dimension finie admet des bases.

Théorème de la base incomplète :

THÉORÈME 2

On peut compléter tout système libre de E en une base de E.

Théorème de la base extraite :

THÉORÈME 3

De tout système générateur, on peut extraire une base de E.

Théorème de la dimension :

THÉORÈME 4

Toutes les bases de E ont le même cardinal appelé dimension de E.

Exemples fondamentaux

$$\dim \ K^n = n \,,\ \dim \ K_n[X] = n+1$$

Un résultat très important est le suivant :
caractérisation des bases parmi les familles libres et génératrices :

CARACTERISATION

Soit E un Kev **de dimension n** et $(v_1,\cdots,v_n)$ une famille de E, alors :

$(v_1,\cdots,v_n)$ est une base de E

$\Leftrightarrow (v_1,\cdots,v_n)$ est libre $\Leftrightarrow (v_1,\cdots,v_n)$ est génératrice.

On dit qu'une base est un *système libre maximal* et *un système générateur minimal.*

6- Sous-espaces en dimension finie

THÉORÈME 1

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.
Plus précisément : si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$\dim(F) \le \dim(E)$$

et

$$(\dim(F) = \dim(E)) \Leftrightarrow (F = E)$$

C'est un résultat très utile pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F est égal à E.

Base adaptée à une somme directe :

THÉORÈME 2

Soient $E_1, \cdots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe alors : $\dim \bigoplus_{1 \le i \le p} E_i = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$

Plus précisément, si B_i est une base de E_i la base formée par la réunion des B_i est une base de $\bigoplus_{1 \le i \le p} E_i$

(En fait, on parle de « concaténée » des B_i).

Cette base est dite adaptée à $\bigoplus_{1 \le i \le p} E_i$

Formule de Grassmann :

THÉORÈME 3

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

THÉORÈME 4

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E alors :
F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si :

1. $F \cap G = \{0\}$
2. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

II- Applications linéaires

Dans ce paragraphe E et F désignent des K-espaces vectoriels avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1- Bases et applications linéaires

On suppose ici que E est de dimension finie $n \geq 1$

THÉORÈME 1

Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $(v_1, \cdots, v_n)$ une famille de vecteurs de F,
il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = v_i$$

☞ **On retient :** **qu'une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée de l'image d'une base.**

On en déduit le très utile théorème :

THÉORÈME 2

Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et f, g deux applications linéaires de E dans F,
si $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = g(e_i)$, alors
$$f = g$$

☞ **On retient :** **que deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.**

Dans la pratique, si E est de dimension finie, la détermination de l'image de u se fait à l'aide de l'image d'une base de E :

Proposition 1

Soit $u \in L(E,F)$ où E est de dimension finie et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors :
$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \cdots, u(e_n))$$

Remarque *On peut aussi utiliser une famille génératrice de E …*

L'utilisation d'une base de E permet aussi de caractériser l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité d'une application linéaire :

Proposition 2

Soit $u \in L(E,F)$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, alors :

1. u injective si et seulement si :
la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est libre dans F.
2. u surjective si et seulement si :
la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est génératrice dans F.