Chapitre I

Introduction aux asservissements

Les systèmes[1] asservis sont largement utilisés en électrotechnique : dans les variateurs de vitesse des moteurs par exemple, mais aussi dans tout autre dispositif destiné à contrôler avec précision une grandeur physique, telle qu'une température ou une tension.

Les systèmes, qu'ils soient électriques, mécaniques, thermiques, ou tout autres, ne réagissent pas instantanément à la sollicitation qu'on leur impose. L'asservissement d'un système consiste à réduire la durée de ce régime transitoire ou le rendre insensible aux différentes perturbations qu'il subit.

1. Réponses indicielles

1.1. Système électrique

Le circuit électrique RC est l'archétype du système qui évolue *avec un certain retard.* Dans l'exemple qui suit, le circuit RC est alimenté par une entrée qui évolue en échelon (la *sollicitation* du système) et qui développe alors la *réponse indicielle*[2] du système.

- ***Expérimentation.*** *Saisir le* ***schéma 1.1.*** *donné ci-dessous*[3]*. On étudie la réaction d'un circuit RC face à deux sauts successifs de tension, de 0 à 20 V puis de 20 à 22 V :*

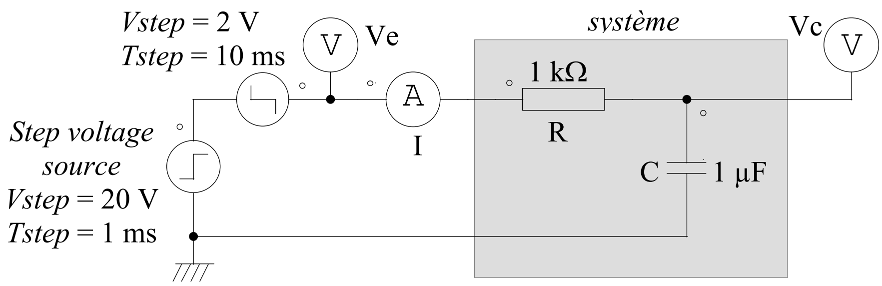


Schéma 1.1.

Lancer la simulation sur [0 ; 20 ms]. Sur le même graphe, tracer la tension Vc *aux bornes du condensateur et la tension d'alimentation* Ve. *On considère que le régime*

---

[1] On appelle *système* un objet ou un ensemble d'objets qu'on isole, par un contour imaginaire, d'un environnement appelé *extérieur*.

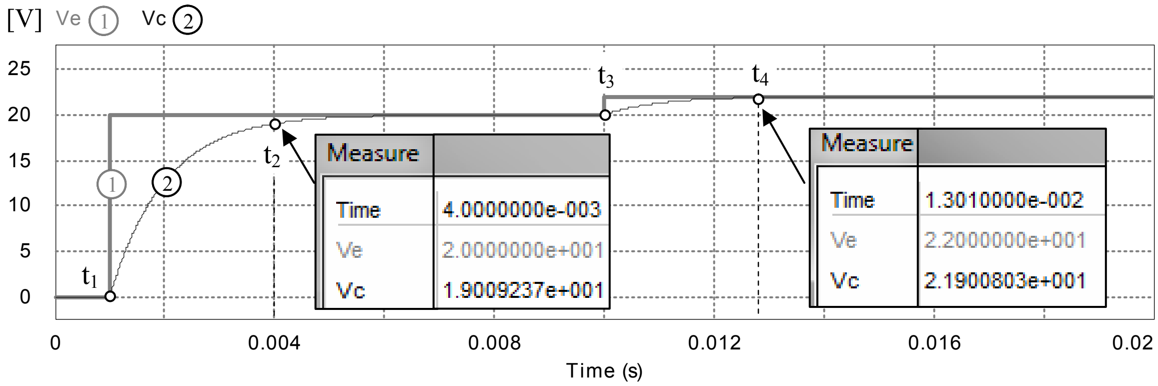
[2] La *réponse* d'un système représente l'allure du signal auquel on s'intéresse, souvent appelé *signal de sortie*. Il faut préalablement avoir défini ce qu'on appelle la *sortie* du système. Ici, la *sortie* est la tension Vc prises aux bornes du condensateur. Pour certains auteurs mathématiciens, la réponse indicielle concerne la réponse à un échelon d'amplitude égale à 1 (sans précision d'unité). On peut toujours attribuer la valeur 1 à une grandeur d'amplitude quelconque.

[3] Les points situés à proximité d'une des deux bornes des sondes de courant ou de tension représentent les bornes rouges des appareils réels. Si besoin, une courte présentation du logiciel Psimdemo est présentée en annexe B, ***mise en œuvre rapide de Psimdemo,*** à la fin de cet ouvrage.

transitoire se termine lorsque la tension aux bornes du condensateur atteint 95 % de sa valeur finale (asymptote) : c'est le temps de réponse à 5% t_r *du circuit électrique. Pour chaque saut de tension, mesurer la valeur de* t_r *: dépend-t-il du niveau de la tension d'alimentation ?*

Réponse :

Les chronogrammes obtenus sont donnés sur le graphe ci-dessous :



Le signal Vc atteint 19 V (soit 95 % du saut de 0 à 20 V) à la date t_2 = 4 ms. Comme le saut a démarré à la date t_1 = 1 ms, on en déduit que le temps de réponse à 5 % vaut $t_r = t_2 - t_1 = 4 - 1 =$ 3 ms. En outre, quand la tension d'entrée passe de 20 V à 22 V à la date t_3 = 10 ms, le signal de sortie évolue encore de 20 V à 22 V (le saut de tension n'est que de 2 V seulement). La date à laquelle Vc atteint 95 % du saut de 2 V (soit 1,9 V), c'est-à-dire pour atteindre la valeur 20 + 1,9 = 21,9 V, vaut t_4 = 13 ms. Comme le second saut a eu lieu à la date t_3 = 10 ms on en déduit que le temps de réponse à 5 % vaut $t_4 - t_3 = 13 - 10 = 3$ ms. Finalement, que l'on alimente le circuit électrique de 0 à 20 V ou de 20 à 22 V, le résultat reste le même : le temps de réponse à 5 % vaut dans tous les cas $t_r \approx 3$ ms et ne dépend pas de l'amplitude du saut de tension.

Le temps de réponse du système quantifie la *durée du régime transitoire*. Le régime qui succède au régime transitoire est appelé le *régime permanent* ou *régime établi,* jamais atteint en toute rigueur car il est asympotique. Lorsque le temps de réponse ne dépend pas de l'amplitude des sauts qu'on impose à l'entrée, le système est dit *linéaire*[4]. Le circuit RC est donc *un système linéaire*. Il n'est cependant pas obligatoire d'observer la tension *Vc* aux bornes du condensateur pour évaluer le temps de réponse d'un tel circuit : on peut également observer la tension V_R aux bornes de la résistance, ou encore le courant I. D'une manière générale, le temps de réponse dépend de la sortie considérée : il faut donc toujours préciser ce que l'on entend par *sortie* d'un système.

On peut retenir que le temps de réponse du système se mesure grâce à la *réponse indicielle*, obtenue lorsque l'*entrée* du système (la *sollicitation*) s'effectue en *saut* (on dit aussi *en échelon*), c'est-à-dire sur un temps de montée suffisamment court (par exemple inférieur à t_r / 100) pour être négligable devant le temps de réponse évalué.

Les régimes transitoires n'ont cependant pas tous la même allure, qui dépend du système étudié. L'allure exponentielle de la sortie observée précédemment était typique d'un système dit *du premier ordre*. On peut observer ce qu'il se passe avec une résistance

[4] Les systèmes linéaires sont modélisés mathématiquement par des équations différentielles à coefficients constants dans le temps. En pratique, un système est linéaire lorsque, excité par une sollicitation sinusoïdale, sa réponse reste sinusoïdale au cours du temps.

électrique connectée à une ligne de transmission (ou câble électrique), d'une longueur égale à 10 m, alimentée par une source de tension qui évolue également en échelon (mise sous tension de la résistance, ou bien transmission d'un code numérique binaire).

- ***Expérimentation.*** *Saisir et analyser le* **schéma 1.2.** *présenté ci-dessous*[5]*. Lancer la simulation sur [0, 10 µs]. Sur le même graphe, tracer la tension d'entrée et la tension de sortie Vr. S'agit-il d'un système du premier ordre ?*

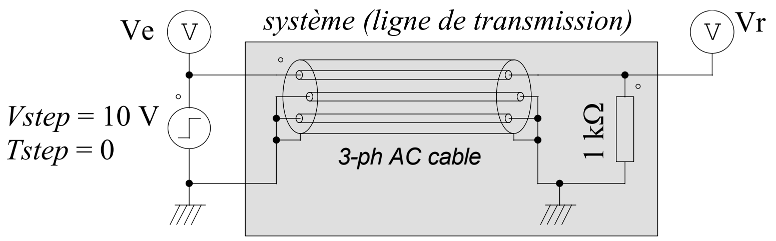
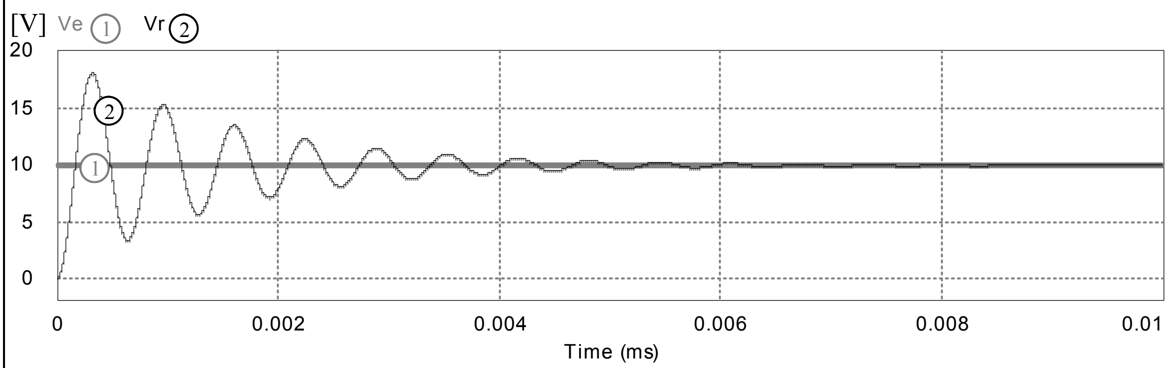


Schéma 1.2.

Réponse :

Il s'agit de la réponse à un saut de tension de 10 V d'un système {ligne, résistance}. Les chronogrammes sont donnés ci-dessous :



La réponse Vr *est oscillante : ce n'est donc pas un système du premier ordre dont la réponse indicielle est exponentielle.*

Le temps de réponse à 5 % – et cette définition est générale – est le temps que met le signal de sortie *à rester dans la bande des ± 5 % de l'amplitude du saut de sortie,* centrée sur la valeur du régime permanent. Cette définition englobe celle donnée pour le système du premier ordre précédent. A première vue cette définition est compliquée. Il faut l'utiliser sur un exemple concret pour l'assimiler.

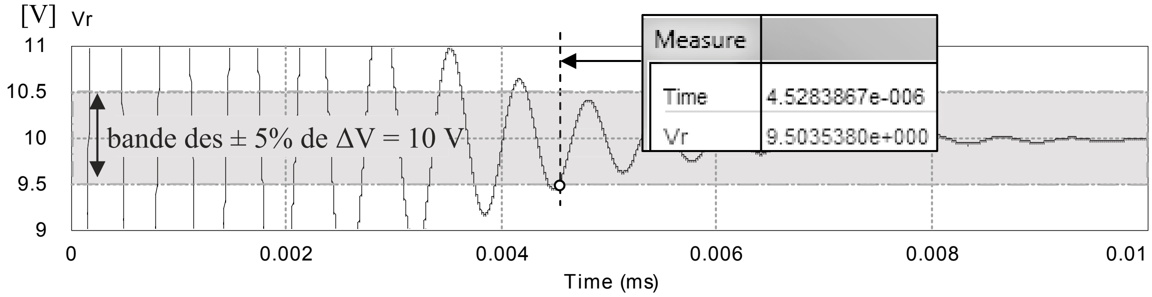
- ***Expérimentation.*** *Mesurer, à l'aide d'une sonde de mesure, le temps de réponse à 5 % de la ligne de transmission précédente.*

Réponse :

Il faut tracer la bande des ± 5 % de l'amplitude du saut de sortie, c'est-à-dire ± 5 % de 10 V (puisque la sortie évolue de 0 à 10 V), soit ± 0,5 V autour de la valeur 10 V du régime permanent. Le temps de réponse est le temps mis par Vr à rester dans la bande [10 – 0,5 V ; 10+0,5 V], c'est-

[5] Le câble électrique représente une ligne de transmission d'informations qui, sous Psimdemo, a pour paramètres *Cable length* = 10 m, *Operating frequency* = 50 Hz, *Rd* = 0,0991 Ω, *Xd* = 0,649 Ω, *Cd* = 0,21·µF, *Ro* = 0,3358 Ω, *Xo* = 0,2513 Ω et *Co* = 0,12 µF.

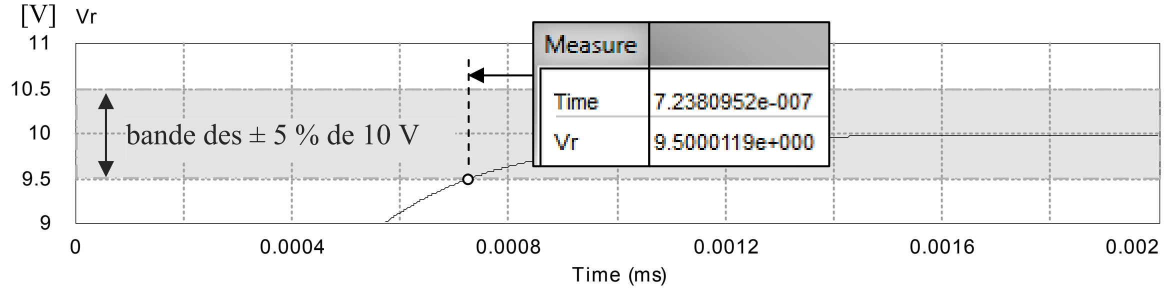
à-dire à rester dans la bande [9,5 V ; 10,5 V], en grisé ci-dessous. On mesure : $t_r \approx 4{,}5$ µs.



• ***Expérimentation.*** *Modifier la valeur de la résistance de charge à 50 Ω puis relancer la simulation. Quel est le nouveau temps de réponse ? Pourquoi est-il nécessaire d'utiliser des charges dites* adaptées[6] *à la ligne de transmission ?*

Réponse :

La sortie n'est plus oscillante et on peut mesurer le nouveau temps de réponse en pratiquant un zoom analogue au précédent et en lisant la date à partir de laquelle Vr reste dans la bande :



La sonde montre que le temps de réponse est de 0,72 µs environ, soit six fois plus faible que précédemment. On se rend compte de la nécessité d'utiliser une charge adaptée à la ligne, car cela permet d'avoir un temps de réponse beaucoup plus faible que précédemment (autorisation d'un débit d'informations plus élevé). Cela évite également l'apparition de pics de surtension aux bornes de la charge, potentiellement destructeurs.

Si l'entrée du système bouge à un rythme plus rapide que son temps de réponse à 5 %, alors la sortie n'a pas le temps de suivre les variations de l'entrée : le système risque de ne pas répondre correctement aux sollicitations qu'on lui impose. Cependant, il existe des cas où l'on souhaite, au contraire, que la sortie d'un système ne réagisse pas aussi vite que son entrée : on peut citer l'exemple du moteur à courant continu piloté par un hacheur, pour lequel la tension rotorique du moteur (*entrée* du système *moteur*) est constituée de créneaux de tension qui évoluent à un rythme plus rapide que ne peut suivre la vitesse (*sortie* du système) liée à l'inertie mécanique de l'ensemble entraîné. Dans ce cas, la vitesse évolue autour d'une vitesse moyenne imposée par la valeur moyenne des créneaux

[6] Une charge est dite *adaptée* à la ligne de transmission si son impédance est égale à l'impédance caractéristique de la ligne (50 Ω ici), comme si la ligne était infiniment longue, sans phénomène d'écho. Noter que le bus de communication industriel PROFIBUS en transmission MBP *(Manchester Bus Powered*) fonctionne pour des charges (*terminaisons*) RC avec R ≈ 100 Ω et C ≈ 2 µF : les normes de transmissions numériques imposent toujours l'utilisation de charges adaptées.

de tension. La notion de *temps de réponse* permet donc de quantifier le temps de réaction du système, ce qui est utile pour prévoir sa réaction face à une sollicitation rapide.

1.2. Système mécanique

On vient d'évoquer le moteur et son inertie mécanique. D'une manière générale, un système mécanique possède également un temps de réponse, à l'instar des systèmes électriques précédents. On peut illustrer cela en observant le comportement en vitesse d'un moteur à courant continu (*moteur DC*) soumis à un échelon de tension d'induit[7].

- ***Expérimentation.*** *Saisir puis analyser le* ***schéma 1.3.*** *donné ci-dessous* [8]*. Lancer la simulation sur [0 ; 10 s]. Observer, sur le même graphe, la grandeur d'entrée* Uinduit *puis la grandeur de sortie* vitesse (en tr/min). *En déduire le temps de réponse à 5% du système.*

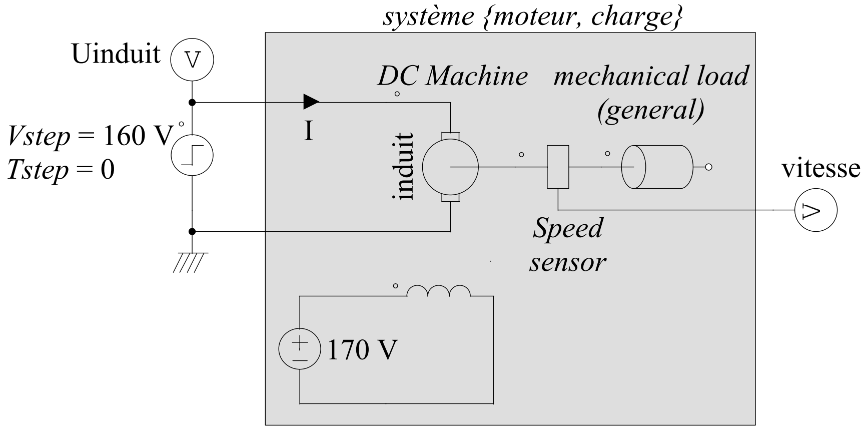
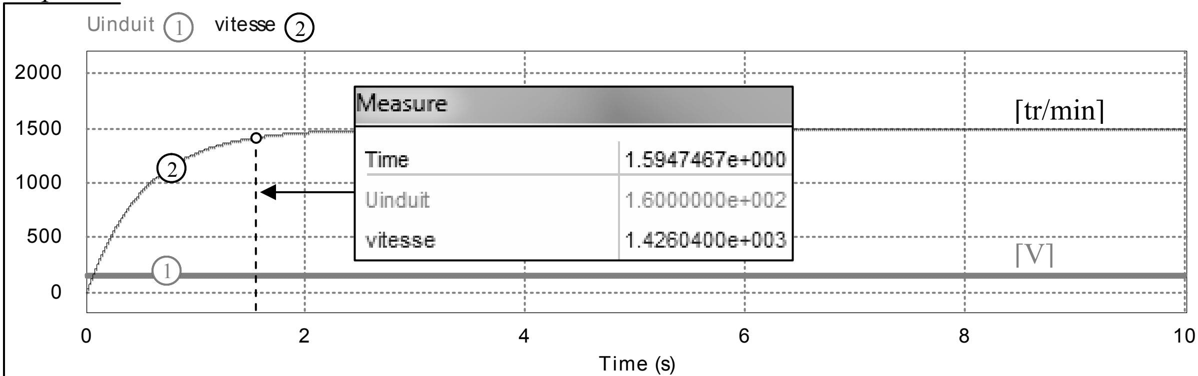


Schéma 1.3.

Réponse :



La sortie évolue de 0 à 1500 tr/min, donc varie sur Δn = 1500 – 0 = 1500 tr/min. Le temps de réponse à 5 % est la durée mise par la vitesse à rester dans la bande des ± 5 % de Δn, c'est-à-dire la bande des ± 75 tr/min autour de 1500 tr/min. Ici, il s'agit donc du temps mis pour atteindre 1500 – Δn = 1500 – 75 = 1425 tr/min (= 95 % de 1500 tr/min). La sonde de mesure indique la valeur $t_r \approx 1{,}59$ *s (voir ci-dessus).*

[7] Plus rigoureusement, il s'agit ici d'un système *électromécanique* car l'entrée est électrique (tension d'induit ou courant d'induit) et la sortie est mécanique (vitesse angulaire du rotor). Les systèmes électromécaniques sont étudiés au chapitre VII. Un moteur DC développe un couple électromagnétique d'entraînement proportionnel au courant d'induit I.

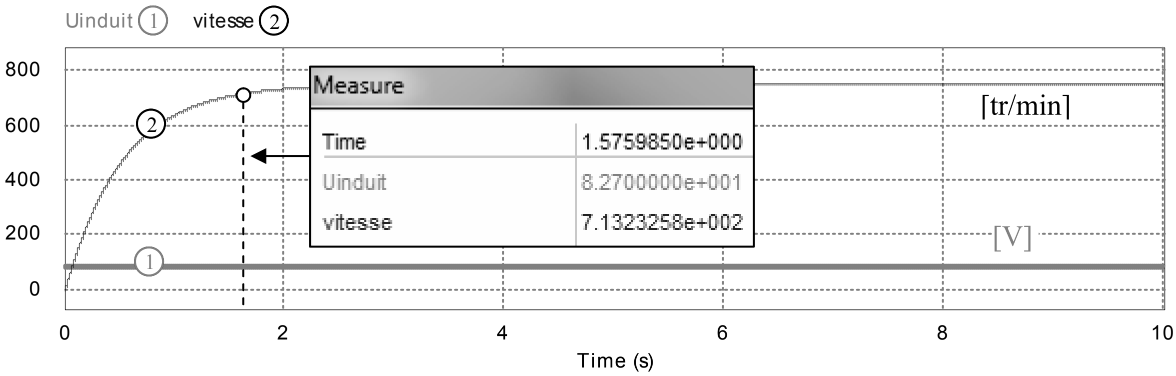
[8] Les paramètres sont les suivants, pour la machine DC : *Ra* = 5 Ω ; *La* = 0,03 H ; *Rf* = 447 Ω ; *Lf* = 2,6 H ; *Moment of Inertia* = 0,003 kg·m² ; *Vt* = 170 V ; *Ia* = 3 A ; *n* = 1500 tr/min ; *If* = 0,38 Ω ; *Torque Flag* = 1. Pour la charge mécanique : *Moment of inertia* = 0,1 kg·m² ; *Tc* = 1 Nm.

La vitesse a la même allure exponentielle que la tension Vc du circuit RC vu au schéma 1.1. Ce sont des systèmes qui ont des comportements identiques lorsqu'on compare leur vitesse ou tension : ce sont des systèmes *du premier ordre*. On peut néanmoins encore se demander si le temps de réponse du moteur ne dépend toujours pas de la valeur de la tension d'induit (*entrée*) qu'on applique à son rotor, pour tester sa linéarité.

- ***Expérimentation.*** *Modifier la tension d'induit de manière à obtenir une vitesse de régime permanent réduite de moitié, soit 750 tr/min. Observer les mêmes chronogrammes que précédemment puis mesurer à nouveau t_r. Conclure sur la linéarité du système considéré.*

Réponse :

Différents essais de simulation permettent de trouver la tension d'induit adéquate : il faut prendre Uinduit ≈ 82,7 V pour obtenir 750 tr/min.



Le temps de réponse est le temps mis pour atteindre 95 % de 750 tr/min, c'est-à-dire 712,5 tr/min. La sonde de mesure donne $t_r \approx 1{,}58$ s, légèrement différent du temps de réponse de 1,59 s relevé précédemment : le temps de réponse dépend donc (très légèrement ici) de la tension d'induit, preuve que le système n'est pas parfaitement linéaire. En réalité, la linéarité d'un système est un modèle théorique qui permet de faire une approximation mathématique plus ou moins exacte du système réel étudié. En toute rigueur, un système donné n'est linéaire que dans un domaine restreint de valeurs (appelé le domaine de validité *du modèle).*

1.3. Système thermique. Modélisation

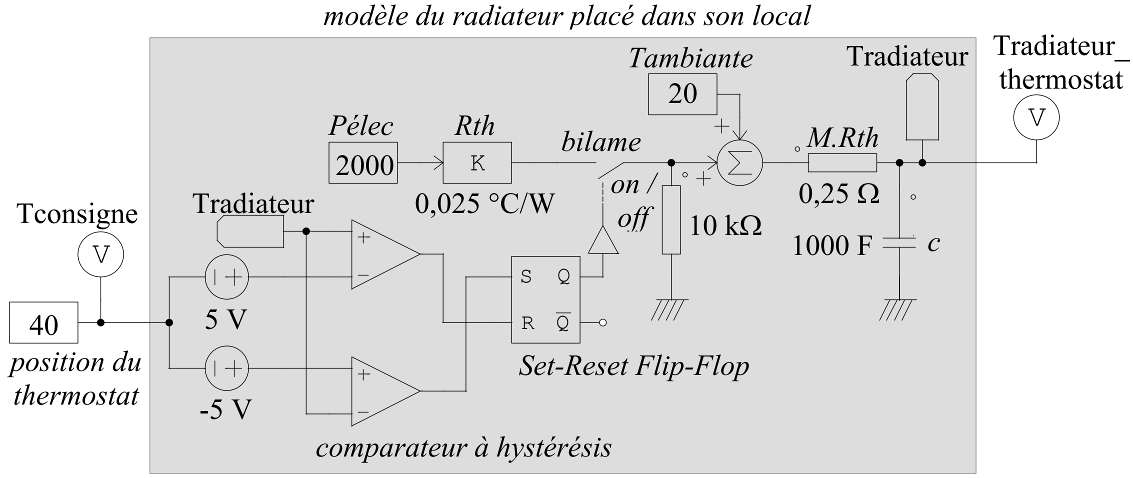
On peut modéliser un système thermique quelconque par un circuit équivalent électrique, pour faciliter son étude. Comme un système thermique réagit souvent comme un système linéaire du premier ordre, on peut chercher à le modéliser comme le circuit RC étudié précédemment. On prend l'exemple d'un radiateur électrique initialement à température ambiante T_{amb}, avec comme entrée la puissance électrique de chauffe et comme sortie la température de surface du radiateur. On peut alors théoriquement démontrer que la température de surface T du radiateur est liée à la puissance électrique $P_{élec}$ de chauffe par la relation :

$$\boxed{\left(M \cdot R_{th}\right) \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} + T = P_{élec} \cdot R_{th} + T_{amb}}$$

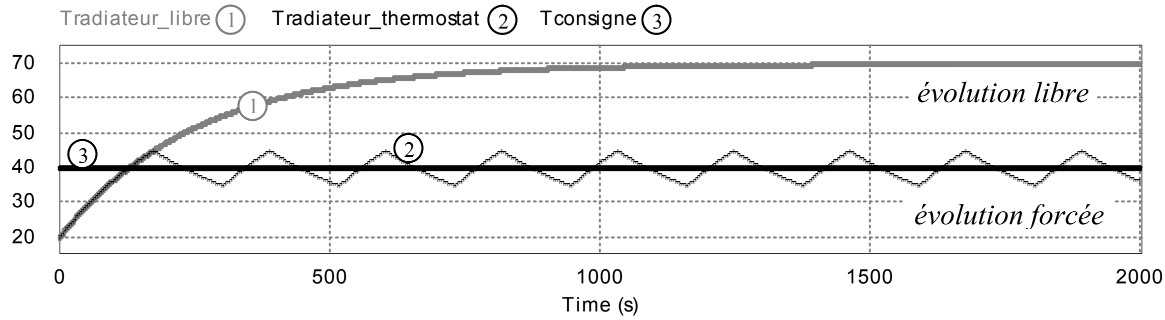
avec M *la masse du radiateur [kg],* R_{th} *sa résistance thermique [K/W] ou [°C/W],* c *sa capacité calorifique massique* $[J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}]$ *ou* $[J \cdot kg^{-1} \cdot °C^{-1}]$*,* T *sa température de surface,* $P_{élec}$ *la puissance électrique de chauffe [W] et* T_{amb} *la température initiale du radiateur [K] ou [°C] (T ambiante).*

En régime permanent, la température T reste constante dans le temps (dT/dt = 0) et l'équation précédente devient $T = P_{élec} \cdot R_{th} + T_{amb}$ soit $\boxed{T - T_{amb} \triangleq \Delta T = P_{élec} \cdot R_{th}}$: c'est la *loi d'Ohm thermique* qui donne l'excursion maximale de température ΔT du système.

Le circuit électrique qui modélise ce système thermique est représenté ci-dessous[9]. Les seuils de tensions +5 V et -5 V des comparateurs à hystérésis imposent l'ondulation crête à crête de la température (10 °C) et permettent de préserver la durée de vie d'un thermostat bilame. La consigne de température est ajustée à 40 °C (position du thermostat) :



Pour une consigne *Tconsigne* de 40 °C, la courbe de la température de surface du radiateur, *Tradiateur_thermostat,* est présentée ci-dessous et comparée à l'évolution de la température *Tradiateur_libre* obtenue en l'absence du thermostat :



Bien qu'il existe, le temps de réponse du radiateur est impossible à établir en présence du thermostat car on n'est pas dans le cadre d'un régime linéaire du système : on ne laisse pas le radiateur évoluer librement du fait de la présence de cette régulation de type *tout-ou-rien* (0 % ou 100 % de la puissance de chauffe). Seule l'évolution libre de ce système permet de déterminer le temps de réponse à 5 %.

Un thermostat mécanique à bilame n'est pas adapté à une régulation précise de température (par exemple à 0,1 °C près). Pour obtenir une régulation de température plus

[9] Le radiateur, modélisé ici, est un radiateur de puissance électrique *Pélec* = 2 kW, de résistance thermique *Rth* = 0,025 °C/W, de masse *M* = 10 kg et de chaleur massique *c* = 1000 $J.kg^{-1} \cdot K^{-1}$. Cela permet d'en déduire les paramètres des composants électriques du circuit RC : *M·Rth* = 10 × 0,025 ≈ 0,25 Ω et *c* = 1000 F.

précise il faut envisager un autre dispositif de commande qui doit modifier la puissance de chauffe *Pélec* : c'est l'objectif réalisé par les *correcteurs*, utilisés en régulation électronique, joints à l'utilisation de gradateurs à trains d'ondes étudiés au chapitre XIII.

2. Identification des systèmes du premier et du second ordre

2.1. Systèmes du premier ordre

Comme les systèmes du premier ordre ont tous un comportement similaire, il est avantageux de les décrire par une fonction mathématique unique et générale, adaptable à tous les systèmes du premier ordre rencontrés. Cette fonction mathématique, appelée *fonction de transfert* $\underline{H}$, est une fonction de variables complexes[10] qui exprime simplement le rapport qui lie l'entrée complexe $\underline{E}$ et la sortie complexe $\underline{S}$. Elle est exprimée sous la forme *canonique* (ou *normalisée*) suivante :

$$\frac{\text{sortie}}{\text{entrée}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} \triangleq \boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1+\tau \cdot j\omega} = \frac{H_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$ [11]

avec H_0 le gain statique [unité de S/E], τ la constante de temps [s] et ω_0 la pulsation propre = $1/\tau$ [s^{-1} ou rad/s].

La fonction de transfert complexe $\underline{H}$ d'un système linéaire du premier ordre est donc caractérisée par la donnée de *deux* paramètres seulement : H_0 et τ (ou $\omega_0 = 1/\tau$).

- ***Etude.*** *Reprendre le* ***schéma 1.1.*** *vu au début de ce chapitre. Démontrer que la fonction de transfert du système définie par $\underline{H} \triangleq \dfrac{\underline{Vc}}{\underline{Ve}}$ est donnée par la relation théorique $\underline{H}$ = $1/(1+j\cdot R\cdot C\cdot\omega)$. En déduire la valeur du gain statique H_0 et de la constante de temps τ.*

Réponse :

Le courant $\underline{I}$ qui traverse R et C est donné par la relation $\underline{I} = \dfrac{\underline{Ve}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \underline{Ve}\Big/\left(R + \dfrac{1}{j\cdot C\omega}\right)$. *La tension complexe $\underline{Vc}$ s'en déduit par la relation* $\underline{Vc} = \underline{Z}_C \cdot \underline{I} = \dfrac{1}{j\cdot C\cdot\omega}\cdot\dfrac{Ve}{R+\dfrac{1}{j\cdot C\omega}} = \dfrac{Ve}{1+j\cdot RC\cdot\omega}$.

[10] On rappelle que la grandeur complexe $\underline{U}$ de module U et d'argument φ représente la grandeur sinusoïdale temporelle $u(t) = U\cdot\sqrt{2}\sin(\omega\cdot t + \varphi)$, U étant la valeur efficace de la grandeur u(t), ω étant sa pulsation, t la date à laquelle la grandeur est évaluée et φ sa phase à l'origine (phase observée au début de l'étude).

[11] En toute rigueur, la fonction de transfert utilisée ici est la fonction de transfert des systèmes linéaires du premier ordre de type *passe-bas,* les plus fréquents. Il existe d'autres fonctions de transfert pour les systèmes du premier ordre. Leur étude détaillée dépasse le cadre de cet ouvrage. Dans tous les cas, on ne cherche pas à comprendre la signification physique de $\underline{H}$: elle sert simplement d'intermédiaire de calcul pour l'étude des systèmes, abordée au chapitre II sous forme de blocs fonctionnels. Seules les valeurs de H_0 et de τ sont utiles ici.