A. Mathématiques et statistiques de gestion

Chapitre 1
Proportions et taux d'évolution

1. Tests de compétences sur les proportions et les taux

L'utilisation de proportions et de taux d'évolution, exprimés avec le format pourcentage, est fréquente en économie, en gestion, en finance, on dans la communication de résultats commerciaux.

Il est donc important de bien maîtriser ce type de calcul, en particulier quand on travaille avec un tableur. Avant d'étudier les pages qui suivent, il est recommandé de répondre d'abord aux 5 questions test suivantes.

Test 1.
Parmi les 2 980 participants à un rassemblement festif, 1 937 sont des jeunes de 25 ans ou moins. Quelle est en pourcentage la proportion des jeunes de 25 ans ou moins à ce rassemblement ? Ecrire la formule qui permet de la calculer.
Sachant de plus que la proportion des filles parmi les jeunes de 25 ans ou moins est de 54 %, déterminer la proportion des filles de 25 ans ou moins dans ce rassemblement.

Test 2.
L'effectif des usagers d'un parc de loisirs est passé de 2 480 à 2 825 du mois de juin au mois de juillet. Quel est en pourcentage le taux d'évolution entre juin et juillet ?
Ecrire la formule qui permet de le calculer.

Test 3.
Le prix de vente TTC d'un article est de 382,72 €. Quel est son montant HT, sachant que le taux de la TVA appliquée sur cet article est de 19,6 % ?

Test 4.
Le chiffre d'affaires d'une entreprise était de 680 000 € en 2010. Sur les années suivantes, il a subi les évolutions successives suivantes :
+5 % ; +7 % ; –3 % ; + 2 %
Sans calcul des chiffres d'affaires intermédiaires, quel a été le taux d'évolution global entre 2010 et 2014 ?

Test 5.
Les données sont celles du test 4.
Quel est le taux d'évolution moyen entre 2010 et 2014 ?

Les rappels de cours qui suivent s'appuient sur les exemples donnés dans ces 5 tests.

2. Les proportions en pourcentage

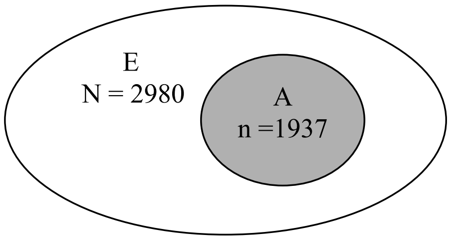
1) Le format pourcentage

Avec les données du test 1, la proportion des jeunes de 25 ans ou moins parmi les participants est :

$$p = \frac{1\,937}{2\,980} = 0{,}65 = \frac{65}{100} = 65\ \%$$

et on notera que :

- 0,65 est le format décimal ;
- $\frac{65}{100}$ est le format fraction ;
- 65 % est le format pourcentage



Cas général : E désigne un ensemble de référence, d'effectif total N, et A désigne une partie de E, d'effectif n. La proportion de A dans E est $p = \frac{n}{N}$

Attention ! La formule n'est pas : $p = \frac{n}{N} \times 100$

Cette remarque est très importante lorsque l'on travaille sur tableur. En effet le tableur considère la notation % comme un format de nombre.

Quand y-a-t'il besoin de multiplier par 100 ? En principe jamais[1].

Sur tableur, on obtient le format % en cliquant sur l'icône correspondante. Si on travaille à la main, ou avec une calculatrice, après calcul de la fraction $\frac{n}{N}$, la valeur à placer avant le symbole % s'obtient facilement en décalant la virgule de deux positions vers la droite :

0,432 = 43,2 % ; ou de même 0,055 = 5,5 % ; ou encore 0,0024 = 0,24 %

Noter[2] enfin que la formule $p = \frac{n}{N}$ s'écrit aussi de deux manières équivalentes :

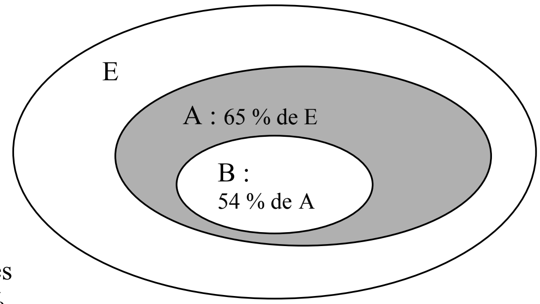
$$N = \frac{n}{p} \text{ et } n = p \,.\, N$$

1 Multiplier par 100 est une survivance de l'époque où les calculs se faisaient à la main, parce qu'il n'existait ni calculatrice, ni tableur. La difficulté était d'obtenir la valeur à placer avant le symbole % ; et pour faire la division à la main, il valait mieux en effet commencer par multiplier par 100. Avec la calculatrice, ce ne sera nécessaire qu'en de rares situations.

2 Voir sur le site la révision des fondamentaux du calcul algébrique.

2) Les proportions de proportions

Les données sont toujours celles du test 1.
N = 2980 est l’effectif total de l’ensemble E des participants à la fête.
La proportion des jeunes de 25 ans ou moins (partie A de E) est :
p_1 = 65 % et la proportion des filles parmi les moins de 25 ans est p_2 = 54 %



La proportion p de B (filles **et** de moins de 25 ans) parmi tous les participants à la fête est :

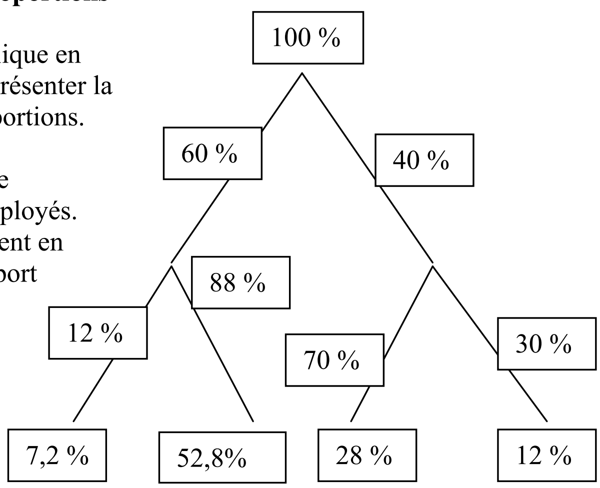
$\boxed{p = p_1 \,.\, p_2}$ soit $p = 0{,}65 \times 0{,}54 = 0{,}351 = 35{,}10$ %

3) Exemple d’arbre de proportions

La formule précédente s’applique en particulier lorsqu’on peut représenter la situation par un arbre de proportions.

Une grande entreprise compte 40 % de cadres et 60 % d’employés. Parmi les cadres, 70 % viennent en voiture, et les autres en transport en commun.

Parmi les employés, 12 % viennent en voiture et les autres en transports en commun.



Quelle est la proportion de salariés de l’entreprise qui viennent en voiture ?

Proportion des salariés :

- « cadres **et**[3] venant en voiture » : $0{,}40 \times 0{,}70 = 28$ %
- « employés **et** venant en voiture » : $0{,}60 \times 0{,}12 = 0{,}072 = 7{,}2$ %

Dans cette entreprise il y a donc 7,2 % + 28 % = 35,2 % de salariés venant en voiture.

[3] « et » a été mis en évidence : en probabilités, la notion équivalente sera celle d’intersection de deux événements.

3. Taux d'évolution en pourcentage

1) Corrigé du test 2

Avec les données du test 2, le taux d'évolution entre juin et juillet est :

$$\frac{2\,825-2\,480}{2\,480}=\frac{345}{2\,480}\simeq 0{,}1391\simeq 13{,}91\ \%$$

Comment faire ce calcul sur la calculatrice ? La 1ère méthode est la suivante :

(2825-2480)÷2480 entrer

Une 2ème méthode permet d'éviter l'utilisation des parenthèses et d'obtenir au passage la variation absolue 345 :

2825-2480 entrer ce qui donne 345

÷2480 entrer, ce qui donne l'affichage ci-contre et le résultat 0,1391 = 13,91 %

```
(2825-2480)/2480
          .1391129032
2825-2480
                  345
Rép/2480
          .1391129032
```

Comme pour les calculs de proportions, il n'est pas nécessaire d'effectuer une multiplication par 100 sur la calculatrice.

La 3ème méthode recommandée (et indispensable sur tableur) sera la suivante : en remarquant que $\frac{2\,825-2\,480}{2\,480}=\frac{2\,825}{2\,480}-\frac{2\,480}{2\,480}$

on a : taux d'évolution de juin à juillet =

$$\frac{2\,825}{2\,480}-1\simeq 0{,}1391\simeq 13{,}91\ \%$$

```
2825/2480-1
          .1391129032
```

Noter qu'il n'y a pas besoin de parenthèse ici, car la division a priorité sur la soustraction. La calculatrice divise bien 2 825 par 2 480 et non par 2 479.

Enfin on pourrait taper simplement **2825÷2480 entrer** et retrancher 1 de tête[4].

Sur tableur on aurait par exemple :

	A	B	C	D
1	mois 1	mois 2	mois 3	mois 4
2	2480	2825	2642	2910
3		=B2/A2-1	=C2/B2-1	=D2/C2-1
3		0,1391	-0,0648	0,1014
3		13,91%	-6,48%	10,14%

Formule dans la colonne B ligne 3, recopiée à droite

Résultat obtenu en ligne 3

Même ligne 3 après clic sur icône %

[4] Dans ce cas on aura obtenu le résultat en 10 frappes sur le clavier, au lieu de 17 pour la première méthode ; cela n'a l'air de rien, mais on imagine mieux le gain de temps quand on réalise un même travail en 10 heures au lieu de 17 heures : –41,17 %

2) Formules de calcul d'un taux d'évolution en pourcentage

X désigne une variable numérique positive ayant une valeur initiale X_i au temps initial t_i et une valeur finale X_f au temps t_f.

La variation absolue de X entre les temps t_i et t_f est la différence : $X_f - X_i$

La variation relative de X entre les temps t_i et t_f est le quotient $\dfrac{X_f - X_i}{X_i}$

Cette variation relative s'appelle aussi taux d'évolution de X entre les temps t_i et t_f :

$$\boxed{t = \frac{X_f - X_i}{X_i} \quad (1)}$$

Un taux est habituellement exprimé avec le format pourcentage.

Le taux t est
- positif s'il y a augmentation de X entre les temps t_i et t_f
- négatif s'il y a diminution de X entre les temps t_i et t_f

La relation (1) peut s'écrire aussi : $t = \dfrac{X_f - X_i}{X_i} = \dfrac{X_f}{X_i} - \dfrac{X_i}{X_i}$ donc

$$\boxed{t = \frac{X_f}{X_i} - 1 \qquad (1\text{ bis})}$$

Cette deuxième formule de calcul est préférable, car plus « économique » (la valeur de X_i n'y est utilisée qu'une seule fois, et retrancher 1 demande moins de travail que de retrancher X_i).

3) Exemple de calcul d'une valeur initiale

La question du test 3 revient à calculer une valeur initiale (montant HT) connaissant la valeur finale 382,72 (montant TTC) après augmentation de 19,6 %.

Il est important de voir d'abord ce qu'il ne faut pas faire et pourquoi :
- 382,72 – 19,6 % × 382,72 ≃ 307,71 n'est pas le montant HT puisque :
- 307,71 + 19,6 % × 307,71 ≃ 368,02 qui n'est pas le montant TTC voulu

et l'on pourra retenir que :

Une diminution de 19,6 % suivie d'une augmentation de 19,6 % ne ramène pas à la valeur de départ.

Désignons par x le montant HT cherché ; on a :

x + 19,6 % x = 382,72, donc après mise en facteur de x :
(1 + 19,6%) x = 382,72 soit : 1,196 x = 382,72

Autrement dit, ajouter 19,6 % revient à multiplier par 1,196 et il en résulte :

$$x = \frac{382{,}72}{1{,}196} = 320$$: le montant HT cherché est donc 320 €

4) Coefficient multiplicateur associé à un taux d'évolution

Dans l'exemple précédent, 1,196 est le coefficient multiplicateur associé au taux de TVA. Le coefficient multiplicateur est l'outil de calcul indispensable quand on travaille avec des taux d'évolution. La formule (1 bis) peut s'écrire aussi :

$$\boxed{\frac{X_f}{X_i} = 1 + t \qquad (2)}$$

et

$$\boxed{K = 1 + t \qquad \text{est le coefficient multiplicateur associé à } t}$$

On peut illustrer la formule (2) par le schéma suivant qui montre l'opération permettant de passer de la valeur initiale à la valeur finale :

$$X_i \xrightarrow[\text{Multiplication par } 1 + t]{\text{Variation d'un taux } t} X_f$$

> Faire évoluer une grandeur X_i d'un taux t, revient au même que multiplier X_i par le coefficient multiplicateur associé 1 + t

Par exemple :
- augmenter de 20% revient à multiplier par 1,2
- diminuer de 15% revient à multiplier par 0,85

L'utilisation de ce coefficient facilite les calculs, et est indispensable pour calculer X_i connaissant X_f, et aussi pour les calculs de taux global ou de taux moyen.

5) Evolutions successives

Calcul du taux pour deux évolutions successives :

> Lorsqu'une grandeur X subit deux évolutions successives de taux t_1 et t_2, le taux d'évolution global est le taux t associé au coefficient multiplicateur $K_1.K_2$, produit des coefficients multiplicateurs associés aux taux t_1 et t_2.

Cette propriété peut être illustrée par le schéma suivant :

$$X_0 \xrightarrow[\times 1{,}2]{+20\%} X_1 \xrightarrow[\times 0{,}85]{-15\%} X_2$$

Le taux d'évolution entre X_0 et X_2 n'est pas 20% – 15 % = 5%
Le coefficient multiplicateur associé au taux d'évolution entre X_0 et X_2 est :

$$1{,}2 \times 0{,}85 = 1{,}02$$

Le taux d'évolution entre X_0 et X_2 est donc 1,02 – 1 = 0,02 = 2 %

4. Calcul de taux d'évolution global et moyen

1) Exemple de calcul d'un taux global (test 4)

Il arrive souvent que l'on cherche à suivre l'évolution d'une valeur numérique de mois en mois, de trimestre en trimestre, d'année en année : chiffre d'affaires, quantité, tarif, dépense, etc.

Dans ce cas, on pourra chercher à résumer l'évolution de cette valeur numérique par un taux global, et par un taux moyen.

Avec les données du test 4, le taux d'évolution global n'est évidemment pas la somme des taux : ce n'est pas (5 + 7 – 3 + 2)% =11 %
La situation peut être illustrée par le schéma suivant :

$$X_0 \xrightarrow[\times 1{,}05]{+5\ \%} X_1 \xrightarrow[\times 1{,}07]{+7\ \%} X_2 \xrightarrow[\times 0{,}97]{-3\ \%} X_3 \xrightarrow[\times 1{,}02]{+2\ \%} X_4$$

Le coefficient multiplicateur global permettant d'obtenir X_4 à partir de X_0 est :

$$1{,}05 \times 1{,}07 \times 0{,}97 \times 1{,}02 \simeq 1{,}1116$$

d'où : taux global = 1,1116 – 1 = 0,1116

Donc, pour ces quatre évolutions successives : **taux global ≃ 11,16 %**

Et on remarque que ce taux est légèrement supérieur à la somme des taux 11 %.

2) Exemple de calcul d'un taux d'évolution moyen

Le taux moyen est le taux constant qui donnerait la même évolution globale sur les périodes consécutives, que la succession des taux observés sur chaque période.

NB : de même que le taux global n'est pas la somme des taux :
le taux moyen n'est pas la moyenne arithmétique des taux.

Ce n'est donc pas 11% / 4 = 2,75 %

La définition ci-dessus et le schéma permettent de calculer ce taux moyen. On détermine d'abord le coefficient multiplicateur K associé à ce taux moyen :

$$X_0 \xrightarrow[\times K]{+\,t\,\%} X'_1 \xrightarrow[\times K]{+\,t\,\%} X'_2 \xrightarrow[\times K]{+\,t\,\%} X'_3 \xrightarrow[\times K]{+\,t\,\%} X_4$$

$$\xrightarrow[\times\, 1{,}116]{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

D'après le schéma, le coefficient multiplicateur K cherché est donc défini par :

$$K^4 = 1{,}116$$

La solution de cette équation est donnée par la fonction racine $4^{\text{ème}}$, puisque c'est précisément la définition de cette fonction :

$$K = \sqrt[4]{1{,}1116}$$

Sur la calculatrice, trouver et utiliser le symbole de la fonction racine $n^{\text{ème}}$ n'est pas la méthode la plus simple. Il est conseillé d'utiliser plutôt la définition équivalente suivante de la fonction racine $n^{\text{ème}}$:

$$\sqrt[n]{A} = A^{1/n}$$

Cette propriété est justifiée par une règle connue de calcul sur les exposants :

$$(A^{1/n})^n = A^{n/n} = A,$$

$1^{\text{ère}}$ méthode avec la calculatrice :

K **= 1.1116^(1/4)** ≃ 1,0268 donc
taux moyen ≃ 2,68 %

```
1.1116^(1/4)
             1.026803013
1.05∗1.07∗.97∗1.02
               1.1115909
Rép^4-1
             1.026800912
```

$2^{\text{ème}}$ méthode avec la calculatrice (recommandée) :

1/4 est l'inverse de 4 ; on l'obtient sur la calculatrice en tapant 4 suivi de la touche $\mathbf{x^{-1}}$, ce qui évite de recourir à des parenthèses : **4/x^{-1}/entrer** donne pour résultat 0,25.

La méthode recommandée est d'enchaîner les deux calculs :
1.05 × 1.07 × 0.97 × 1.02 entrer : ≃ 1,11159
puis : **^4x^{-1} entrer**[5] : ≃ 1,0268

On a donc : **taux moyen ≃ 2,68 %**

légèrement inférieur à 2,75 %

[5] Dès qu'on tape ^ après un calcul, comme c'était déjà le cas avec ÷, la calculatrice affiche Rép, indiquant que le nouveau calcul va s'effectuer sur le résultat du calcul précédent