

Table des matières

Chapitre 1	
Logique, ensembles, arithmétique	1
Logique des prédicats du premier ordre	1
Paradoxes de la théorie « naïve » des ensembles	2
Image directe et image réciproque d'une partie	3
Ensembles équipotents	4
Relations binaires fondamentales	8
Ensembles ordonnés	9
Treillis	11
Bon ordre et axiome du choix	14
Arithmétique	15
Chapitre 2	
Groupes	17
Lois de composition interne	17
Axiomes de la structure de groupe	19
Centre d'un groupe	21
Sous-groupes	22
Ordre d'un élément dans un groupe	25
Morphismes et isomorphismes de groupes	28
Groupes simples et groupes résolubles	30
Chapitre 3	
Anneaux et corps	33
Propriétés générales	34
Éléments inversibles et diviseurs de zéro	35
Anneau des polynômes à coefficients dans un anneau commutatif	37
Caractéristique d'un anneau non nul	42
Idéaux d'un anneau non nul	43
Divisibilité dans un anneau intègre	47
Autres types d'anneaux	51
Corps	56
Corps ordonnés	57
Chapitre 4	
Espaces vectoriels	60
Nécessité des axiomes	61
Sous-espaces vectoriels	62
Endomorphismes d'un espace vectoriel	64
Valeurs propres et vecteurs propres, polynôme caractéristique et polynôme minimal	67

Matrices	73
Modules	76
Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques	79
Chapitre 5	
Nombres réels	83
Ecriture décimale des nombres réels	83
Différents ensembles de nombres réels	84
Ordre canonique de \mathbb{R}	87
Topologie de \mathbb{R}	88
Distance d'un point à une partie et distance entre deux parties	93
Endomorphismes du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ de \mathbb{R}	94
Mesurabilité de parties de \mathbb{R}	96
Chapitre 6	
Suites numériques	100
Convergence et divergence	100
Convergence au sens de Cesàro	104
Limite supérieure et limite inférieure	105
Valeurs d'adhérence	107
Chapitre 7	
Séries numériques	110
Convergence et convergence absolue	110
Mise en défaut de certains critères de convergence	114
Séries à termes positifs	117
Règles de convergence	118
Comparaison série-intégrale	122
Modification de l'ordre des termes	122
Séries doubles et produit de Cauchy	124
Équivalence des suites des sommes partielles et équivalence des suites des restes	127
Autres types de convergence	129
Chapitre 8	
Fonctions d'une variable réelle : continuité et limites	133
Continuité	133
Théorème des valeurs intermédiaires	137
Limites	140
Continuité uniforme, continuité absolue et fonctions lipschitziennes	143
Continuité de l'application réciproque d'une fonction continue	149
Continuité et topologie	151
Chapitre 9	
Fonctions d'une variable réelle : dérivabilité	155
Dérivabilité locale et globale	155
Discontinuité de la fonction dérivée	165
Sens de variation d'une fonction dérivable	169
Dérivées et limites	172
Dérivées et extremums	175
Fonctions indéfiniment dérivables	176
Développements limités	178
Dérivées supérieures et inférieures	181
Equations différentielles	183

Chapitre 10

Fonctions d'une variable réelle monotones, périodiques, convexes, bornées	190
Monotonie et continuité	190
Fonctions périodiques	196
Fonctions convexes	197
Fonctions bornées	201
Fonctions à variation bornée	202

Chapitre 11

Intégration	207
Intégrale de Riemann	207
Convergence des intégrales	213
Primitives et intégrales	219
Intégrales dépendant d'un paramètre	223
Sommes de Riemann	226
Intégration des relations de comparaison	228

Chapitre 12

Suites de fonctions	231
Convergence simple	231
Convergence uniforme	235
Dérivation	240
Intégration	243
Convergence en moyenne	245

Chapitre 13

Séries de fonctions	250
Différents types de convergence	250
Discontinuité de la somme d'une série de fonctions	256
Interversions de sommations et de limites	258
Séries entières	260
Série de Taylor	262
Séries de Fourier	264

Chapitre 14

Fonctions de plusieurs variables	268
Continuité	269
Différentiabilité	270
Théorèmes d'inversion	277
Dérivées partielles secondes	279
Extremums	281
Intégration	282

Chapitre 15

Topologie générale	288
Séparation	289
Suites convergentes, limites de suites, continuité	291
Connexité	295
Compacité	301

Chapitre 16	
Espaces métriques	305
Boules	306
Equivalences de distances	310
Complétude	312
Distance d'un point à une partie et distance entre deux parties	315
Chapitre 17	
Espaces vectoriels normés	317
Nécessité des axiomes	318
Somme de deux parties	320
Comparaison des normes	321
Continuité des applications linéaires	322
Parties compactes et parties fermées et bornées	325
Parties convexes d'un espace vectoriel normé	327
Points internes à une partie	329
Isométries	330
Espaces vectoriels euclidiens et hilbertiens	332
Chapitre 18	
Courbes planes	338
Tangentes et points d'inflexion	339
Directions asymptotiques et asymptotes	344
Longueur d'une courbe	347
Courbes remarquables	350
Chapitre 19	
Probabilités	355
Evénements indépendants	356
Espérance mathématique et variance	357
Convergence des suites de variables aléatoires	360