Thème 1 - L'oscillateur harmonique

[S1.1] Définition

Le modèle de l'oscillateur harmonique correspond à un système qui oscille autour de sa position d'équilibre de manière sinusoïdale, le mouvement n'est pas amorti. Ce modèle, bien qu'idéal, permet de modéliser de nombreux phénomènes réels simples qui s'en approchent sous certaines conditions.

[S1.2] Équation différentielle de l'oscillateur harmonique

L'équation différentielle caractérisant un oscillateur harmonique caractérisé par la fonction s qui oscille, se met sous la forme :

$$\ddot{s} + \omega_0^2\ s = \omega_0^2\ s_{eq}.$$

ω_0 est la pulsation propre du système, homogène à l'inverse d'un temps. Ici s_{eq} représente la position d'équilibre autour de laquelle le système oscille.

✓ Deux oscillateurs mécaniques très courants sont à reconnaître. La fonction s peut représenter la position horizontale d'une masse accrochée à un ressort, habituellement notée x. Dans le cas d'un pendule simple, s est l'angle θ formé par le pendule avec la verticale. Le pendule simple se comporte comme un oscillateur harmonique pour de faibles valeurs de θ.

✓ On utilise souvent les notations $\dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ et $\ddot{s} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$.

✓ On peut remarquer que si le système oscille autour de la position $s_{eq} = 0$, alors l'équation différentielle se met sous la forme :

$$\ddot{s} + \omega_0^2\ s = 0.$$

Cette équation n'admet pas de second membre, la solution particulière qui correspond à la position d'équilibre est nulle.

[S1.3] Définitions liées au signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal dépendant du temps se met sous la forme :

$$s(t) = A \cos\left(\omega t + \varphi\right).$$

t est la variable. A et ω sont des constantes positives et φ est une constante. On appelle :

- ω la pulsation, grandeur homogène à l'inverse d'un temps ;
- A l'amplitude, grandeur homogène à la dimension de $s(t)$;
- φ la phase à l'origine ou phase initiale sans dimension ;
- $\omega t + \varphi$ l'argument de la fonction cos, c'est la phase instantanée.

✓ D'un point de vue mathématique un signal sinusoïdal peut indifféremment être une expression en $\sin$ ou en $\cos$.

✓ L'argument d'une fonction mathématique telle que $\cos$, $\sin$, $\exp$ etc... est toujours adimensionné, autrement dit l'intérieur de telles fonctions doit être sans dimension.

[S1.4] Relation entre période, fréquence et pulsation

On note T la période temporelle du signal, aussi appelée période, on note ω sa pulsation et f sa fréquence. On a :

$$f = \frac{1}{T}$$

et aussi :

$$\omega = 2\pi f.$$

✓ L'homogénéité est assurée car f est en Hz $= \mathrm{s}^{-1}$, la période T est en s et ω est en rad.s^{-1} donc de dimension homogène à l'inverse d'un temps.

✓ Le radian est une unité d'angle sans dimension.

[S1.5] Conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique se conserve. Un oscillateur harmonique correspond à un système qui oscille sans amortissements, en l'absence de frottements. Ainsi pour un oscillateur mécanique on a :

$$E_m(t) = E_m(t=0) = constante.$$

✓ La période propre, la fréquence propre et la pulsation propre, sont les grandeurs caractéristiques propres à un système qui oscille sinusoïdalement sans amortissements. Elles sont respectivement notées T_0, f_0 et ω_0.

✓ Comme l'oscillateur harmonique oscille sans amortissements, les oscillations perdurent à l'infini. Ce cas ne correspond pas à un système réel aussi performant soit-il.

Thème 2 - Ondes et signaux

[S2.1] Déphasage entre deux signaux

Soient deux signaux :

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

et :

$$s_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Le déphasage du signal s_2 par rapport au signal s_1 est par définition :

$$\Delta\varphi(t) = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1) = (\omega_2 - \omega_1)\, t + \varphi_2 - \varphi_1.$$

✓ Si les signaux ont même pulsation ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) alors le déphasage du signal s_2 par rapport au signal s_1 est indépendant du temps et dépend simplement des phases à l'origine : $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

[S2.2] Définition d'une onde

Une onde est la propagation d'une perturbation produisant sur son passage une variation réversible des propriétés physiques locales du milieu.

[S2.3] Forme mathématique

On parle d'onde progressive lorsqu'on peut l'écrire sous la forme de fonctions :

$$f(x - ct) \text{ ou } g(x + ct),$$

ou encore :

$$h(t - x/c) \text{ ou } j(t + x/c).$$

✓ Une onde progressive correspond à un phénomène qui se « propage » au sens commun du terme, on voit la perturbation progresser dans l'espace.

✓ Les fonctions $f(x-ct)$ et $h(t-x/c)$ correspondent à des perturbations qui se propagent dans le sens des x croissants, alors que les fonctions $g(x+ct)$ et $j(t+x/c)$ correspondent à des perturbations qui se propagent dans le sens des x décroissants.

[S2.4] Relation sur λ, c et T

Une onde présente une double périodicité spatiale et temporelle. On note λ la période spatiale et T la période temporelle. La période T, la longueur d'onde λ et la célérité c sont reliées par :

$$\lambda = cT.$$

✓ Comme la fréquence f (ou ν) est reliée à la période par :

$$f = \frac{1}{T},$$

on a également :

$$\lambda = \frac{c}{f}.$$

[S2.5] Ondes stationnaires

On parle d'onde stationnaire lorsqu'on peut explicitement séparer les dépendances spatiale et temporelle, mathématiquement on peut l'écrire sous la forme d'un produit de deux fonctions :

$$f(x) \times g(t).$$

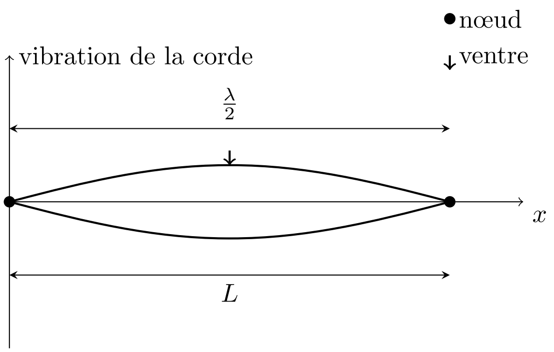
✓ Dans le cas d'ondes stationnaires, l'amplitude de vibration d'un point de l'espace est fixée.

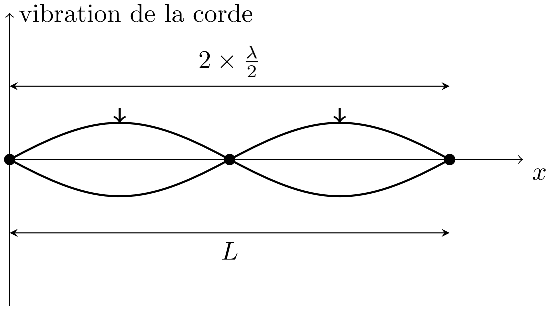
[S2.6] Modes propres

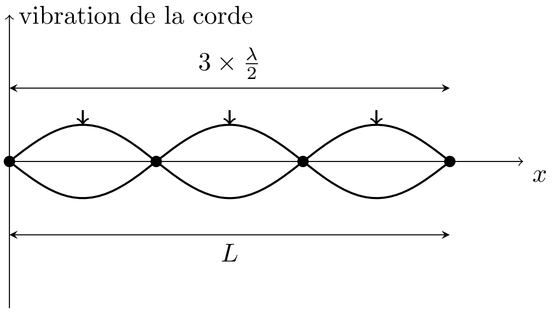
Certaines conditions aux limites permettent d'établir des ondes stationnaires. Selon la fréquence d'excitation on peut visualiser différents modes propres de vibration. Les minimums vibratoires sont des nœuds de vibration alors que les maximums sont appelés des ventres de vibration.

✓ Ce sont les conditions aux limites qui déterminent les modes propres observables.

Ci-après l'allure des amplitudes de vibration des trois premiers modes propres d'une corde de longueur L qui serait tendue entre deux points fixes à ses extrémités. Ci-après les trois premiers modes propres d'une corde de longueur L.







Le premier mode propre correspond à la fréquence fondamentale :

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{2c}{L},$$

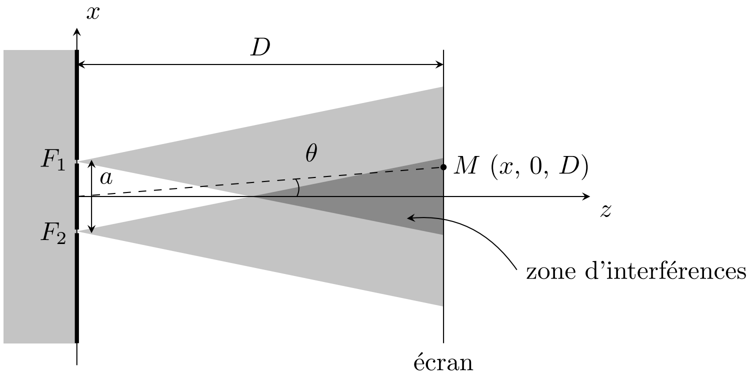
les fréquences suivantes sont appelées les harmoniques et s'expriment comme des multiples entiers de la fondamentale :

$$f_n = n \times f_1.$$

✓ Sur une corde par exemple, toute vibration complexe peut être mise sous la forme d'une combinaison linéaire des modes propres de cette corde. Cette propriété se généralise à d'autres systèmes vibratoires.

[S2.7] Interférences

Les interférences s'obtiennent avec des sources monochromatiques de même longueur d'onde, on dit alors que ces sources sont cohérentes. Le dispositif expérimental le plus connu afin d'observer des interférences est celui des fentes d'Young :



Dans la zone d'interférences on observe des franges sur un écran. L'interfrange est donnée par :

$$i = \frac{\lambda D}{a},$$

et la différence de marche entre les vibrations provenant de F_1 et de F_2 est :

$$\delta = \frac{ax}{D}.$$

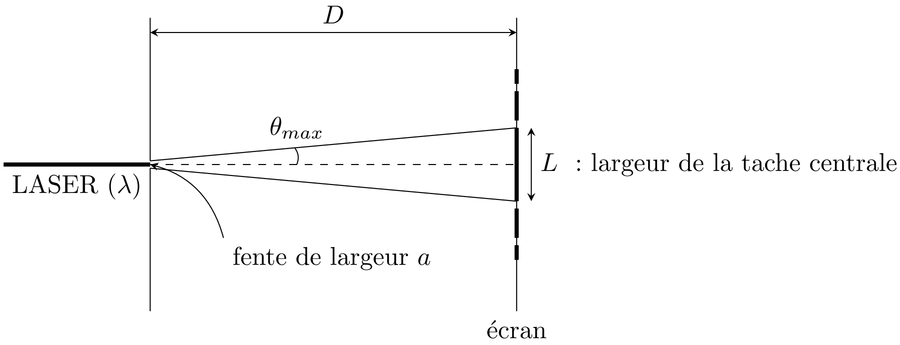
✓ Même si l'exemple le plus célèbre et le plus visuel est optique, les interférences sont possibles avec tout type d'ondes, ainsi il est également possible de rencontrer des interférences sonores, et avec la dualité onde-corpuscule en mécanique quantique, il est même possible de faire interférer des électrons par exemple.

[S2.8] Diffraction

La diffraction devient observable si la taille a de l'obstacle est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ. Dans ces conditions l'angle θ du phénomène peut s'approcher grâce à :

$$\sin\theta \approx \frac{\lambda}{a},$$

L'onde est diffractée et l'obstacle se comporte alors comme plusieurs sources ponctuelles secondaires (principe de Huygens Fresnel).



Dans ce cas, si $D \gg a$ on observe expérimentalement que :

$$\sin\theta_{max} \approx \frac{\lambda}{a}.$$

Thème 3 - Optique géométrique

[S3.1] Indice d'un milieu

L'indice optique n d'un milieu est défini comme :

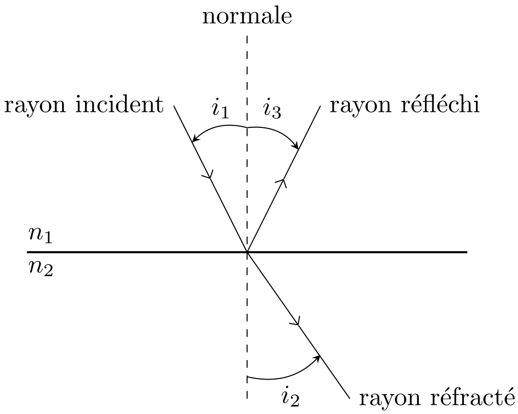
$$n = \frac{c}{v},$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide et v la célérité de la lumière dans le milieu considéré.

✓ n est toujours supérieur à 1. Il est égal à 1 pour le vide et environ égal à 1 pour l'air.

[S3.2] Lois de la réfraction et de la réflexion

Les trois lois de Snell-Descartes régissent la réfraction et la réflexion.



- Le rayon incident, le rayon réfracté et le rayon réfléchi sont dans un même plan, appelé plan d'incidence (le plan de la feuille sur le schéma).
- Lors de la réfraction :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2,$$

  avec n_1 et n_2 les indices optiques de chacun des milieux, i_1 l'angle d'incidence et i_2 l'angle réfracté.
- Lors de la réflexion l'angle incident i_1 vaut l'angle réfléchi i_3.

✓ On appelle dioptre, le plan de séparation de deux milieux d'indices différents.

[S3.3] Miroir plan

L'image d'un point par un miroir plan est un point symétrique par rapport au plan du miroir.