Les complexes

Lecture guidée

Énoncé

➥ D'après Métropole – 22 juin 2015 – Exercice 3 **5 points**

> Ne consacrez que 50 minutes environ à l'exercice.

1 Résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z :

$z^2 - 8z + 64 = 0$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(0, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2 On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 4 + 4\text{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.

> $\sqrt{3}$ doit vous faire penser que les arguments de a et b sont des multiples de π/3 ou π/6. D'autre part, ces deux nombres sont sans doute les solutions de l'équation de la question 1, ce qui vous permet de vérifier vos résultats.

a. Calculer le module et un argument du nombre a.

b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(0, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

> Donc inutile de se lancer dans un dessin avant cette question !

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2.d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

> En lisant « on pourra s'aider » il faut comprendre « on devra s'aider », notamment pour répondre à la conjecture de la question 4.b.

3 On considère les points *A′*, *B′* et *C′* d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.

a. Montrer que $b' = 8$.

b. Calculer le module et un argument de a'.
Pour la suite, on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

> Vous pouvez utiliser les résultats admis dans le sujet pour vérifier vos réponses aux questions précédentes ; ce qui vous permet ici de vérifier les résultats de la question 3.b.

4 a. On note *r*, *s* et *t* les affixes des milieux respectifs *R*, *S* et *T* des segments [*A′B*], [*B′C*] et [*C′A*]. Calculer *r* et *s*. On admet que :

$$t = 2 - 2\sqrt{3} + i\left(2 + 2\sqrt{3}\right).$$

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle *RST* ?

> Le sujet dit « conjecture » ce qui n'inclut pas encore de justification. Il n'y a donc pas de preuve demandée pour obtenir des points ici. La réponse est simplement « rectangle », « isocèle » ou « équilatéral ». Inspirez-vous du dessin.

Justifier ce résultat.

Que dit le cours ?

1 ***Résolution dans C d'une équation du second degré***

Si $\Delta < 0$ alors $x_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

2 a. ***Calcul d'un module***

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

b. ***Calcul de l'argument***

Mettre le module en facteur, puis rechercher θ tel que
$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

c. ***Forme exponentielle***

$z = z\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = ze^{i\theta}$

d. ***A est sur le cercle de centre O si***

AO = *R* (*R* est le rayon du cercle à déterminer)
Se souvenir de $AO = |z_A - z_O|$

3 ***Multiplication des complexes***

Sous forme exponentielle, la multiplication des complexes suit les règles des puissances : $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$, $|zz'|=|z||z'|$, $\left(e^{0}\right)=1$

4 **a.** ***Milieux et distances***

Si M et N sont deux points du plan complexe d'affixes respectives m et n, alors le milieu du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et $MN=|z_M-z_N|$.

b. ***Pour calculer l'angle entre deux vecteurs***

$\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$

Si le triangle est rectangle : l'angle doit être $\dfrac{\pi}{2}$.

Si le triangle est équilatéral, deux angles doivent être égaux à $\dfrac{\pi}{3}$, ou bien on calcule les longueurs des trois côtés.

Si le triangle est isocèle, deux angles sont égaux, ou bien on calcule les trois longueurs des côtés du triangle, deux seulement sont égales.

Attention : le triangle peut être rectangle et isocèle…

Corrigé

1 $\Delta=64-4\times64=-192$. (E) admet donc deux racines complexes :

$z_1=\dfrac{8+i\sqrt{192}}{2}=4+4i\sqrt{3}$ et $z_2=4-4i\sqrt{3}$.

2 **a.** $|a|=\sqrt{16+16\times3}=8$ d'où $a=8\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=8\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

b. $a=8e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b=8e^{-i\frac{\pi}{3}}$

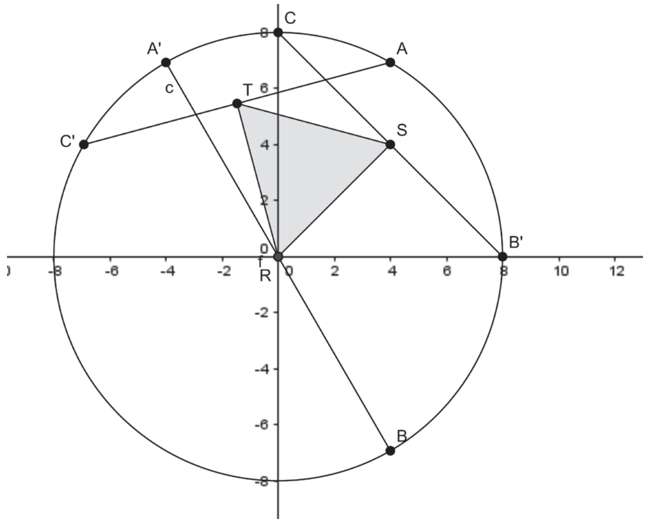
c. $AO=\left|8e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=8\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=8$ de même $BO=8$ et $CO=|8i|=8|i|=8$ donc A, B, C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 8.

d. (Le dessin est ici complété avec la suite de l'exercice).

3 **a.** $b'=be^{i\frac{\pi}{3}}=8e^{-i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}=8e^{0}=8$

b. $a'=8e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Le module de a' est 8 et un argument de a' est $\dfrac{2\pi}{3}$.

4 **a.** $r=\dfrac{a'+b}{2}=8\dfrac{e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}=0$ $\qquad s=\dfrac{b'+c}{2}=4+4i$



b. On peut conjecturer que le triangle *RST* est équilatéral.

$RS=|\mathrm{r}-\mathrm{s}|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$RT=|\mathrm{r}-\mathrm{t}|=\sqrt{4+12-8\sqrt{3}+4+12+8\sqrt{3}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$TS=|\mathrm{t}-\mathrm{s}|=\left|2-2\sqrt{3}+i\left(2+2\sqrt{3}\right)-4-4i\right|$

$TS=\sqrt{4+12+8\sqrt{3}+4+12-8\sqrt{3}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$RT=TS=RS$ donc *RST* est équilatéral.

À vous de jouer !

Énoncé

➥ D'après Asie – 16 juin 2015 – Exercice 4 **5 points**

Le plan $\mathbb{C}$ est muni du repère orthonormé direct $\left(0,\vec{u},\vec{v}\right)$. On donne le nombre complexe $j=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre *j* et de mettre en évidence un lien entre ce nombre et les triangles équilatéraux.

Partie A – Propriétés du nombre *j*

1 **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2+z+1=0$$

b. Vérifier que *j* est solution de cette équation.

2 Déterminer un module et un argument de *j*, puis donner sa forme exponentielle.

3 Démontrer les égalités suivantes :

a. $j^3=1$

b. $j^2=-1-j$

4 On note *P*, *Q*, *R* les images respectives des nombres complexes 1, *j* et j^2 dans le plan.

Quelle est la nature du triangle *PQR* ? Justifier la réponse.

Partie B

Soient *a*, *b*, *c* trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a+jb+j^2c=0$.

On note *A*, *B*, *C* les images respectives des nombres *a*, *b*, *c* dans le plan.

1 En utilisant la question A.3.b., démontrer l'égalité $a-c=j\left(c-b\right)$.

2 En déduire que *AC* = *BC*.

3 Démontrer l'égalité $a-b=j^2\left(b-c\right)$.

4 En déduire que le triangle *ABC* est équilatéral.

Corrigé de lecture

> Ne consacrez que 50 minutes environ à l'exercice.

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(0,\vec{u},\vec{v}\right)$. On donne le nombre complexe $j=\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

> On reconnaît un argument de π/3.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre *j* et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

> Donc les angles du triangle sont automatiquement égaux à π/3 et ses côtés sont identiques.

Partie A – Propriétés du nombre *j*

1 a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$z^2+z+1=0$

b. Vérifier que *j* est solution de cette équation.

2 Déterminer un module et un argument de *j*, puis donner sa forme exponentielle.

3 Démontrer les égalités suivantes :

a. $j^3=1$

b. $j^2=-1-j$

4 On note *P*, *Q*, *R* les images respectives des nombres complexes 1, *j* et j^2 dans le plan.

Quelle est la nature du triangle *PQR ?* Justifier la réponse.

> Au vu de l'énoncé, le triangle doit être équilatéral. L'énoncé ne demande pas de schéma mais cela peut être utile ici.

Partie B

Soient *a*, *b*, *c* trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a+jb+j^2c=0$.

On note *A*, *B*, *C* les images respectives des nombres *a*, *b*, *c* dans le plan.

1 En utilisant la question A.3.b., démontrer l'égalité $a-c=j\left(c-b\right)$.

2 En déduire que *AC* = *BC*.

> Il semble qu'on montre que le triangle est équilatéral par les longueurs et non par les angles.

3 Démontrer l'égalité $a-b=j^2(b-c)$.

> Il faudra se servir des questions B.1. Et B.2. On voit la ressemblance flagrante avec l'expression de la question B.1 par exemple.

4 En déduire que le triangle *ABC* est équilatéral.

Corrigé de l'exercice

1 **a.** $\Delta=1-4=-3$ donc le polynôme admet deux racines complexes : $z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

b. On vérifie que $z_1=j$ donc j est bien solution de l'équation.

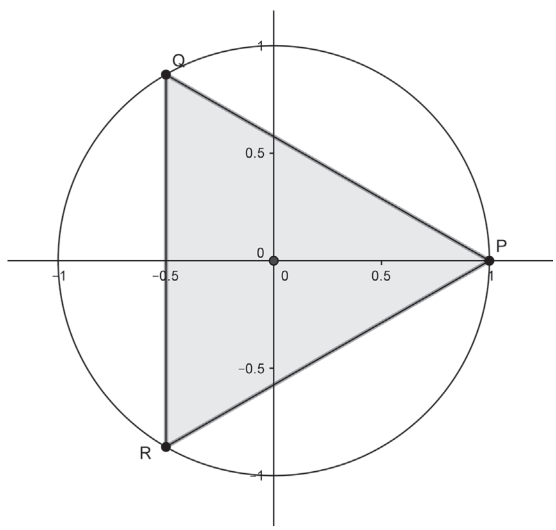
2 $|j|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ et $j=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Un argument de j est $\frac{2\pi}{3}$.

3 **a.** $j^3=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=e^{i6\frac{\pi}{3}}=1$.

b. j est solution de l'équation du 1.a. donc $j^2+j+1=0$ donc $j^2=-1-j$.

4 $j^2=-1-j=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et un argument de j^2 est $\frac{-2\pi}{3}$. On peut conjecturer que le triangle *PQR* est équilatéral.

Pour le démontrer, calculons 2 angles du triangle :



$$\left(\overrightarrow{PQ};\overrightarrow{PR}\right)=\arg\left(\frac{j^2-1}{j-1}\right)=\arg\left(\frac{(j-1)(j+1)}{j-1}\right)=\arg(j+1)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{RP};\overrightarrow{RQ}\right)=\arg\left(\frac{j-j^2}{1-j^2}\right)=\arg\left(\frac{j(1-j)}{(1-j)(1+j)}\right)=\arg j-\arg(1+j)$$

$$\left(\overrightarrow{RP};\overrightarrow{RQ}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}(2\pi)$$

$\left(\overrightarrow{PQ};\overrightarrow{PR}\right)=\left(\overrightarrow{RP};\overrightarrow{RQ}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ donc PQR est un triangle équilatéral.

Partie B

1 D'après la question A.3.b. $j^2=-1-j$.
De plus, $a+jb+j^2c=0$.
D'où $a+jb+(-1-j)c=0 \Leftrightarrow a-c+j(b-c)=0 \Leftrightarrow a-c=j(c-b)$.

2 On déduit de la question précédente que :
$a-c=j(c-b)$ or $j=1$ donc $a-c=c-b \Leftrightarrow AC=BC$.

3 D'après la question A.3.b. $j=-1-j^2$.
De plus, $a+jb+j^2c=0$.
D'où $a+\left(-1-j^2\right)b+j^2c=0 \Leftrightarrow a-b+j^2(c-b)=0 \Leftrightarrow a-b=j^2(b-c)$.

4 On déduit de la question précédente que :
$a-b=j^2(b-c)$ or $j^2=1$ donc $a-b=b-c \Leftrightarrow AB=BC$.
$AB=BC=AC$ donc ABC est un triangle équilatéral.

Autres exercices

Exercice 1

➥ Extrait Métropole 20 juin 2013 – Exercice 3

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z-i|=|z+1|$ est une droite.

2 Le nombre complexe $\left(1+i\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.