Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Logique

Assertions

*Une **assertion mathématique** est une application d'un ensemble de variables, à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{V, F\}$. Une assertion $P : E \to \{V, F\}$ est aussi appelée une **propriété des éléments** de E.*

Connecteurs logiques élémentaires

La négation, la disjonction, la conjonction, l'implication et l'équivalence de deux assertions sont définies par leurs tables de vérité :

P	Q	$non\ P$	$P\ ou\ Q$	$P\ et\ Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Propriétés des connecteurs logiques élémentaires

• $P\,ou\,Q \iff Q\,ou\,P$ • $P\,et\,Q \iff Q\,et\,P$	P, Q et R trois assertions. La conjonction et la disjonction sont commutatives.
• $(P\,ou\,Q)\,ou\,R \iff P\,ou\,(Q\,ou\,R)$ • $(P\,et\,Q)\,et\,R \iff P\,et\,(Q\,et\,R)$	La conjonction et la disjonction sont associatives.
• $P\,et\,(Q\,ou\,R) \iff (P\,et\,Q)\,ou\,(P\,et\,R)$ • $P\,ou\,(Q\,et\,R) \iff (P\,ou\,R)\,et\,(P\,ou\,R)$	La conjonction et la disjonction sont distributives l'une sur l'autre.
• $P \iff non(nonP)$ • $non(P\ ou\ Q) \iff (non\ P\ et\ non\ Q)$ • $non(P\ et\ Q) \iff (non\ P\ ou\ non\ Q)$	Les deux dernières assertions sont les lois de Morgan.

Quantificateurs

Les propriétés d'un ensemble E sont de l'un des deux types suivants :

- ***Existentiel :** il existe un élément de E vérifiant P. On note $\exists x \in E \;\; P(x)$.*
- ***Universel :** tous les éléments de E vérifient P. On note $\forall x \in E \;\; P(x)$.*

S'il existe un unique élément de E vérifiant P, on note $\exists!\ x \in E,\ P(x)$.

Règles de calcul pour les quantificateurs

- $non\ \big(\exists x \in E;\ \ P(x)\big) \iff \big(\forall x \in E,\ \ non\ P(x)\big)$
- $non\ \big(\forall x \in E,\ \ P(x)\big) \iff \big(\exists x \in E;\ \ non\ P(x)\big)$
- $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y) \iff \forall y \in F,\ \forall x \in E\ , P(x,y)$
- $\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) \iff \exists y \in F,\ \exists x \in E\ , P(x,y)$

Stratégies pour une implication

$\Updownarrow$
- $P \Rightarrow Q$
- $(non\, P)\ ou\ Q$
- $non\, Q \Rightarrow non\, P$
- $non\big[P\ et\ non\, Q\big]$.

Ces équivalences sont utiles pour démontrer $P \Rightarrow Q$ par contraposée, ou par l'absurde.

Théorème de récurrence simple

Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbf{N}$, et $n_0 \in \mathbf{N}$.

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geq n_0),\ \big(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\big) \end{cases}$$

Théorème de récurrence double

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ (\forall n \geq n_0),\ \big(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)\big) \end{cases}$$

Théorème de récurrence forte

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geq n_0),\ \big(\mathcal{P}(n_0) \textbf{ et } \cdots \textbf{ et } \mathcal{P}(n)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

Ensembles

Parties d'un ensemble

E un ensemble, A, B, C des parties de E. On dit que
- *A est **inclus** dans B ($A \subset B$) si tout élément de A appartient à B.*
- *A et B sont **égaux** ($A = B$), lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$.*

Opérations élémentaires sur les parties

- *$A \cup B = \{x \in E |\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$ est la **réunion** de A et B.*
- *$A \cap B = \{x \in E |\ x \in A \text{ et } x \in B\}$ est l'**intersection** de A et B.*
- *$\complement_E A = \{x \in E |\ x \notin A\}$, est le **complémentaire** de A dans E.*
- *$A \setminus B = \{x \in E |\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$ est la **différence** de A et B.*

Propriétés des opérations élémentaires

- L'intersection est distributive sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- La réunion est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

- $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
- $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Lois de Morgan

Fonction indicatrice d'une partie

Pour tout $x \in E$, on note

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}.$$

$\mathbf{1}_A : E \to \{0,1\}$ *est la fonction indicatrice de A.*

- $\mathbf{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbf{1}_A$
- $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$
- $\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A (1 - \mathbf{1}_B)$
- $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$

Produit cartésien de deux ensembles

Soit E, F deux ensembles, le ***produit cartésien*** *de E et F est l'ensemble défini par* $E \times F = \{(x,y)\,;\ x \in E, y \in F\}$. *L'égalité de deux couples* (x,y) *et* (x',y') *est définie par* $(x,y) = (x',y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

Applications

Application injective, surjective

Une application $f : E \to F$ *est dite :*

- ***injective*** *si* $\big(\forall (x,x') \in E \times E\big),\ \big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big)$ *;*
- ***surjective*** *si* $(\forall y \in F),\ (\exists x \in E)\ ;\ \ y = f(x)$.

Composée d'applications et injectivité, surjectivité

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

- f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective.
- f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective.
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Application bijective

Une application $f : E \to F$ *est dite* ***bijective*** *si elle est à la fois injective et surjective, i.e.* $(\forall y \in F),\ (\exists!\, x \in E)\ ;\ \ y = f(x)$.

Application réciproque d'une bijection

Soit $f : E \to F$ *une* ***bijection***. *On définit une application* $f^{-1} : F \to E$, *appelée* ***application réciproque*** *de* f, *par*

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ \begin{cases} y \in F \\ x = f^{-1}(y) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in E \\ y = f(x) \end{cases}.$$

f bijective $\iff \exists g : F \to E \quad \begin{matrix} f \circ g = id_F \\ g \circ f = id_E \end{matrix}$

En ce cas, $g = f^{-1}$ est l'application réciproque de f.

Composée de bijections

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

f et g bijectives $\Rightarrow g \circ f$ bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Image directe et image réciproque d'une partie

Soit $f : E \to F$ une application, $A \subset E,\ B \subset F$.

- *L'**image directe** de A par f est le sous-ensemble de F défini par*
  $f(A) = \{f(x)\,;\ x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A; y = f(x)\}$.
- *L'**image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de E défini par*
  $\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Quelques-uns ont donné le nom de mathématiques
à la magie parce que par le moyen des mathématiques,
on fait des choses si surprenantes
que le peuple croit qu'il y a magie.

Antoine Furetière

Techniques fondamentales en algèbre et analyse

Nombres réels, calculs algébriques

Sommes et produits finis

Soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel. On note

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{0\le k\le n} x_k \ \textit{la somme des } x_k \\ P_n &= x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n = \prod_{k=0}^{n} x_k = \prod_{k\in\{0,\dots,n\}} x_k \ \textit{le produit des } x_k. \end{aligned}$$

Les propriétés d'associativité, commutativité et distributivité de la multiplication sur l'addition se généralisent aux sommes et produits finis.

Somme télescopique
$(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de réels.

$$\sum_{k=0}^{n} \left[a_{k+1} - a_k\right] = a_{n+1} - a_0$$

La somme des n premiers (resp. carrés, cubes d') entiers est donnée par :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Coefficients binomiaux

Le produit des n premiers entiers est la **factorielle de** n. On note $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

On convient que $0! = 1$.

Coefficients du binôme
où $(n,p) \in \mathbf{Z}^2$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \le p \le n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Les coefficients du binôme sont des entiers naturels qui vérifient les propriétés suvantes :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$(a,b) \in \mathbf{C}^2$ et $n \in \mathbf{N}$.

Identité géométrique

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k}$$

Avec $b = 1$, on obtient la somme des premiers termes de la suite géométrique de raison a.

Systèmes d'équations linéaires

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système de n équations linéaires à p inconnues (S) ne change pas si l'on effectue sur les lignes les **opérations élémentaires** suivantes :

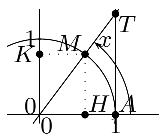
- échanger l'ordre des lignes L_i et L_j, $(L_i \leftrightarrow L_j)$,
- multiplier la ligne L_i par une constante non nulle $\lambda_i \in \mathbf{K}^\star$, $(L_i \leftarrow \lambda_i\, L_i)$,
- ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre L_j $(i \neq j)$, $(L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

Trigonométrie circulaire

Le cercle trigonométrique

$x \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$

- $\cos(x) = \overline{OH}$, $\sin(x) = \overline{OK}$
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$



Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Formules fondamentales de trigonométrie circulaire

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ et } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Propriétés de symétrie

- $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Formules d'addition

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de duplication

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

Formules de linéarisation

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]$
- $\cos^2 a = \frac{1}{2}\big[1 + \cos(2a)\big]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]$
- $\sin^2 a = \frac{1}{2}\big[1 - \cos(2a)\big]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]$

Formules de factorisation

- $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

Nombres complexes

Notation algébrique des nombres complexes

$\forall z \in \mathbf{C}\ \exists!(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ z = x + iy$	$x = \mathfrak{Re}\,(z)$ est la **partie réelle** $y = \mathfrak{Im}\,(z)$ est la **partie imaginaire** de z.
$z = z' \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}\, z = \mathfrak{Re}\, z' \\ \mathfrak{Im}\, z = \mathfrak{Im}\, z' \end{cases}$	z, z' sont deux nombres complexes.

- *Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est le* ***conjugué*** *de z.*
- *Le nombre réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ est le* ***module*** *de z.*

Nombres complexes de module 1

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$	$\theta \in \mathbf{R}$, $e^{i\theta}$ *est l'****exponentielle imaginaire (pure)*** *d'angle θ.*

- Pour tout nombre complexe z de module 1, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$
- Pour tout couple $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$ de réels, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ \ [2\pi]$

Règle de calcul pour l'exponentielle imaginaire

$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$	$(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$

Formules d'Euler et de Moivre

• $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ • $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$	**Formules d'Euler**
• $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ • $\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin n(\theta)$	**Formules de Moivre**

Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a $1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Notation exponentielle d'un complexe non nul

$\forall z \in \mathbf{C}^\star,\ \exists(\rho,\theta) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R},\ z = \rho e^{i\theta}$	**Forme exponentielle** du nombre complexe non nul z.

Si $z \in \mathbf{C}^\star$ s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ alors ρ est le ***module*** *de z et θ est appelé un* ***argument*** *de z. On note $\arg(z)$ un argument quelconque de z.*

$z = z' \iff \begin{cases} \lvert z\rvert = \lvert z'\rvert \\ \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$	$(z,z') \in \mathbf{C}^\star \times \mathbf{C}^\star$

Exponentielle d'un complexe quelconque

Soit $z = x + iy$ un complexe présenté en notation algébrique. On définit

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right).$$

$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$	$(z,z') \in \mathbf{C}^2$

Racines n-ièmes du nombre complexe 1

Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. On note $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.	*ω_n est l'exponentielle imaginaire d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.*
$\mathbf{U}_n = \{\omega_n^k; k \in \mathbf{Z}\} = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\}$	$\mathbf{U}_n$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
$1 + \omega_n + \omega_n^2 + \cdots + \omega_n^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = 0$	La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Racines n-ièmes d'un complexe

L'ensemble des n racines n-ièmes de $a \in \mathbf{C}^\star$ est :

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &= \{\zeta_0\,\omega_n^k;\ k \in \mathbf{Z}\} = \{\zeta_0,\ \zeta_0\,\omega_n,\ \zeta_0\,\omega_n^2, \ldots,\ \zeta_0\,\omega_n^{n-1}\} \\ &= \{\sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{\arg a}{n}},\ \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{\arg a + 2\pi}{n}}, \ldots,\ \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{\arg a + 2(n-1)\pi}{n}}\} \end{aligned}$$

où ζ_0 est une solution *particulière* de $z^n = a$, par exemple $\zeta_0 = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{\arg a}{n}}$.

Équations polynomiales de degré 2

$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$	$(a,b,c) \in \mathbf{C}^\star \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, δ est l'une des racines carrées (complexes) de $\Delta = b^2 - 4ac$.