

«Rien ne se passe dans le monde qui ne soit la signification d'un certain maximum ou d'un certain minimum.»

L. EULER 1707-1783

1. Introduction à ce qu'est un problème d'optimisation

1.1. L'optimisation : enjeux et problèmes —

1.1.1. *Fixons le paysage* — Les mathématiques répertoriées sous le vocable d'*optimisation* interviennent, pour partie, dans le processus de résolution de problèmes de mathématiques appliquées, ou dans l'étude qualitative de certains problèmes de décision (comme ceux de l'*identification* ou de l'*ajustement de paramètres*, de la *commande optimale*, de la *mécanique* et de l'*économie*). Pourtant ce domaine est relativement récent, du moins dans son fonctionnement moderne : si des *problèmes d'extremum* (notamment géométriques) ont des racines fort anciennes (depuis l'antiquité grecque) et si le *calcul des variations* est né effectivement il y a plus de trois cents ans (problème aérodynamique de NEWTON en 1685, problème de la courbe brachystochrone abordé par GALILÉE en 1638 et posé sous forme de défi par Jean BERNOULLI en 1696), ce qu'on appelle la *programmation linéaire* ainsi que la théorie et les méthodes traitant de problèmes d'optimisation avec des contraintes exprimées sous forme d'*inégalités* n'ont été bien mises en forme qu'à partir de la deuxième moitié du XX^{ème} siècle. D'ailleurs le terme même d'optimisation ne figure dans les dictionnaires que depuis peu de temps (et pas dans tous)^{1.1} tandis que sa racine (latine) s'est imposée dans la plupart des langues (*optimization*, *optimierung*, *optimizatsia*, *optimización*, etc.).

Après un travail de modélisation mathématique parfois fort délicat, un problème d'optimisation met en évidence des *variables d'état* ou *paramètres*, des *contraintes* sur ces paramètres, et un *critère à optimiser*. Nous présenterons un problème d'optimisation sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x) \text{ sous la condition } \ll x \text{ est dans } C \gg \\ \text{[forme abrégée : } \text{Min } f(x), x \in C \text{]} \end{array} \quad (\mathbb{P})$$

^{1.1} *Optimalisation, optimaliser* : des termes désuets, ayant d'ailleurs très peu servi.

critère La fonction qui à $x \in X$ (espace des paramètres) associe la valeur (numéri-
 coût que) $f(x)$ est le *critère*, le *coût*, la *fonction-objectif*, la *fonction économique*,
 fonction- etc. (notée traditionnellement J dans certains problèmes dits variationnels).
 objectif/ économique On ne parlera essentiellement de fonction-coût qu'à valeurs réelles (de
 manière qu'on puisse comparer sans ambiguïté les valeurs $f(x_1)$ et $f(x_2)$
 multicroitère attachées aux jeux de paramètres x_1 et x_2); toutefois nous dirons dans
 cet opuscule quelques mots sur l'*optimisation multicritère* (optimisation
 avec plusieurs critères concurrents à la fois). Dans la pratique, il est sou-
 vent difficile de déterminer une fonction-coût à minimiser, et les diverses
 fonctions-coûts choisies donnent lieu à autant de problèmes d'optimisation
 différents. X est l'espace sous-jacent de paramètres, sans aucune précision
 pour l'instant (on peut fixer le paysage en disant que X est un espace vec-
 toriel de dimension finie par exemple). La partie C de X est l'ensemble des
 ensemble- *contraintes* ou *ensemble-contrainte*, c'est-à-dire que n'ont d'intérêt dans le
 contraint problème d'optimisation (\mathbb{P}) que les x se trouvant dans C ; C est représenté
 de diverses manières, par des égalités ou des inégalités à respecter, des
 bornes à ne pas dépasser, etc. Si C est l'espace X tout entier, c'est-à-
 dire si on laisse toute liberté dans le choix de x , on parlera de problème
 d'*optimisation sans contraintes*.

1.1.2. *Les objectifs. Que cherche-t'on ?* — On cherche en premier lieu
 la valeur

$$\bar{f} := \text{borne inférieure, ou infimum, de } f \text{ sur } C, \quad (1.1)$$

ce que l'on écrit $\inf\{f(x)|x \in C\}$ ou, plus simplement, $\inf_{x \in C} f(x)$ ou encore
 $\inf_C f$, c'est-à-dire la valeur la plus grande parmi les réels m tels que

$$m \leq f(x) \text{ pour tout } x \in C. \quad (1.2)$$

Rien n'assure que cette valeur \bar{f} est finie (elle peut «déraper» à $-\infty$) et,
 encore moins, qu'elle est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $\bar{x} \in C$ tel que
 $f(\bar{x}) = \bar{f}$.

Dans le cas où la valeur (finie) \bar{f} est atteinte en un $\bar{x} \in C$, on appelle \bar{f}
 valeur la *valeur minimale* du (ou dans le) problème \mathbb{P} . Chercher à atteindre \bar{f} est
 valeur bien ambitieux, même si l'évaluation de $f(x)$ est facile, de sorte que dans
 minimale les applications on se contente d'assurer $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pour les x (dans C)
 ne s'éloignant pas trop d'un \bar{x} nominal.

Les x se trouvant dans C (ensemble-contrainte de (\mathbb{P})) sont dits *ac-*
 acceptable *ceptables* ou *admissibles* ou *réalisables*. Si, parmi les éléments acceptables,
 admissible acceptable

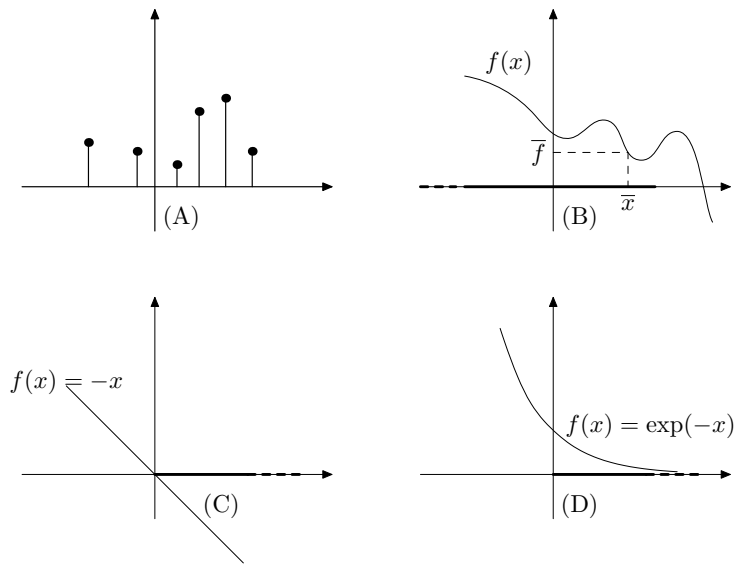


FIGURE 1.1. (A) Ensemble-contraite discret. (B) Ensemble-contraite continu. (C) & (D): $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$; $f(x) = -x$ n'est pas bornée inférieurement sur C , mais $f(x) = e^{-x}$ est bornée inférieurement par 0 sur C sans que cette borne soit atteinte.

il y a un \bar{x} , tel que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in C, \quad (1.3)$$

on dira que \bar{x} est une *solution du problème d'optimisation* (\mathbb{P}). Autres appellations, plus ou moins utilisées suivant les contextes d'utilisation :

- f présente en \bar{x} un minimum (ou une valeur minimale) sur C ; minimiseur
- \bar{x} minimise f sur C ; minimisant
- \bar{x} est un *minimiseur* (ou un *minimisant de f sur C*) ;
- \bar{x} est un *minimum de f sur C* ^{1,2} minimum

Ce sont ces deux dernières appellations que nous utiliserons le plus volontiers, en raison de leur caractère le plus répandu.

^{1,2} Un *minimum*, des *minima* (ou des *minimums* en français).

Notons en passant que, moyennant le changement de fonctions f en $-f$, on peut convertir une formulation «maximiser» en une formulation «minimiser» et vice versa^{1.3} ; maximiser f revient à minimiser $-f$:

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \text{ pour tout } x \in C \iff -f(x) \geq -f(\bar{x}) \text{ pour tout } x \in C.$$

Toutefois il ne faut pas s'y fier : si certaines propriétés de f sont maintenues par passage de f à $-f$ (comme la continuité, la différentiabilité ou la linéarité), d'autres, cruciales, sont détruites par cette transformation ; par exemple «minimiser f sur C , avec f et C convexes» peut être considéré comme un problème plutôt facile (dans un sens qui s'éclaircira plus tard), alors que «maximiser f sur C , avec f et C convexes» est, de fait, un problème d'optimisation très difficile. La convexité est un exemple de propriété davantage tournée vers la minimisation que vers la maximisation.

Quid de l'espace X dans lequel vivent nos variables ou paramètres x ? Du point de vue mathématique, c'est au moins un espace vectoriel normé. Ne seront pas considérés par la suite des problèmes d'optimisation où les données sont des entiers (X est \mathbb{N} ou \mathbb{Z}) ; c'est le domaine, au demeurant fort important de par les applications, répertorié sous le vocable *optimisation discrète* ou *optimisation combinatoire*. Par opposition on utilise le pas très élégant vocable d'*optimisation continue*. La terminologie anglo-saxonne de «*mathematical programming*» recouvre les problèmes d'optimisation posés dans des espaces X de dimension finie («programme» dans cette terminologie n'a rien à voir avec l'écriture d'un code informatique).

optimisation
discrète
combinatoire
continue

1.1.3. Les divers aspects. Analogie entre un problème d'optimisation et un problème policier — Après avoir mis en forme mathématique le problème d'optimisation qu'on s'est posé ou qui a été suggéré par un utilisateur des mathématiques (en physique, automatique, économie, statistique, etc.), on est confronté à un certain nombre de questions que nous illustrons dans le tableau 1.1 en faisant une analogie avec un problème policier. Précisons maintenant chacun de ces points.

1.1.4. Aspect existence et unicité des solutions — Lorsqu'ils ont un problème à traiter, les mathématiciens n'ont de cesse de le mettre dans un format où il y a une et une seule solution ; cela les met dans une situation plus confortable pour approcher ensuite cette solution. Cela est vrai aussi en

^{1.3} *Optimiser* est un vocable évoquant indifféremment *minimiser* ou *maximiser*.

Action	Problème policier	Problème d'optimisation
Établir	Existence d'un délit	Existence d'une solution
Trouver	Indices de culpabilité (sélectionner un échantillon le plus petit possible de coupables susceptibles d'avoir commis le délit)	Conditions nécessaires d'optimalité
Établir	Preuve de culpabilité	Conditions suffisantes d'optimalité
Mettre en œuvre	Poursuite	Algorithme
Envisager	Prévention	Analyse qualitative (e.g. sensibilité aux perturbations)

TABLEAU 1.1. Analogie entre un problème d'optimisation et un problème policier

optimisation, et c'est dans ce contexte qu'interviennent le plus les résultats de topologie et d'analyse fonctionnelle. L'exemple le plus simple de résultat d'existence est le suivant :

PROPOSITION 1.1 (K. WEIERSTRASS). — *Soit C une partie compacte de \mathbb{R}^n et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée inférieurement sur C et il existe une solution au problème de la minimisation de f sur C , c'est-à-dire : il y a au moins un $\bar{x} \in C$ tel que $f(\bar{x}) = \inf_{x \in C} f(x)$.*

Ce résultat admet de multiples extensions ; on verra l'une d'entre elles au paragraphe suivant (cf. §§§2.1.1, page 23). D'autres résultats d'existence ne relèvent pas de ce type de théorèmes, comme par exemple en programmation linéaire (voir plus loin au §§§1.2.1).

Si on ne dispose que de l'information « f est bornée inférieurement sur C », —i.e. $\bar{f} := \inf_C f$ n'est pas $-\infty$ —, on peut être amené à se contenter de solutions approchées de (\mathbb{P}) : étant donné un seuil de tolérance (ou précision) $\epsilon > 0$, une solution à ϵ -près de (\mathbb{P}) est un élément \bar{x}_ϵ de C vérifiant $f(\bar{x}_\epsilon) \leq \bar{f} + \epsilon$, soit encore

$$(\bar{f} \leq) f(\bar{x}_\epsilon) \leq f(x) + \epsilon \text{ pour tout } x \in C. \quad (1.4)$$

Évidemment la question de l'existence de solutions approchées de (P) est plus facile (cela résulte de la définition même d'un infimum d'un ensemble de nombres réels), et celle de l'unicité ne se pose pratiquement pas (en règle générale, il y a une multitude de solutions approchées, pour un seuil ϵ donné).

Pour démontrer l'unicité d'une solution de (P), on a deux voies possibles :

- utiliser des propriétés particulières des données du problème, comme la stricte convexité de la fonction-objectif ;
- dérouler une argumentation mathématique conduisant à cette unicité : on part de deux solutions \bar{x} et \bar{y} de (P) et on développe un raisonnement aboutissant à l'égalité $\bar{x} = \bar{y}$ (une manière équivalente de procéder est de raisonner par l'absurde : on part de deux solutions \bar{x} et \bar{y} de (P), supposées différentes, et on développe un raisonnement conduisant à une contradiction).

Nous terminons par deux définitions complémentaires :

- suite minimisante (x_k) dans C est dite *minimisante* lorsque $f(x_k) \rightarrow \bar{f} := \inf_C f$ quand $k \rightarrow +\infty$. Il existe toujours des suites minimisantes, que le problème (P) ait des solutions ou pas (voir (D) de la Fig. 1.1 ; cela est dû à la définition même de \bar{f}).
- $\bar{x} \in C$ est dit *minimum local* ou *minimiseur local* de f sur C (le qualificatif de *relatif* est également utilisé) s'il existe un voisinage V de \bar{x} tel que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \text{ pour tout } x \in C \cap V. \quad (1.5)$$

Si l'inégalité au-dessus est stricte (pour $x \neq \bar{x}$, bien sûr), on parle de *minimum local* ou *minimiseur local strict* (voir Figure 1.2).

Naturellement le caractère de *minimiseur local* dépend de la topologie choisie sur l'espace de référence X (*i.e.* du type de voisinages V d'un point de X) : \bar{x} peut être un *minimiseur local* pour une topologie et ne pas l'être pour une autre ; cela se passe quand on a affaire à des espaces fonctionnels X de dimension infinie.

Bien sûr aussi la qualité d'un *minimiseur local* \bar{x} dépend de la « taille » de V dans (1.5) : plus V est « grand » et meilleur est le *minimiseur* \bar{x} . Dans la définition (1.2), il était sous-entendu que le voisinage V était l'espace

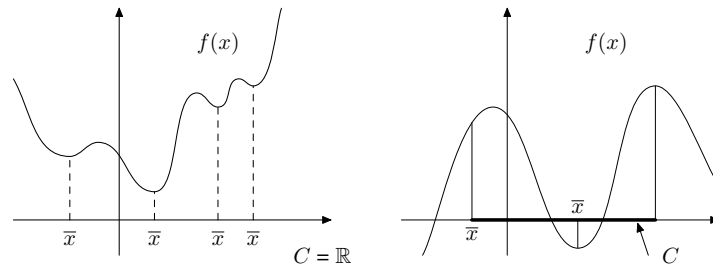


FIGURE 1.2. Minimiseurs locaux \bar{x} de f sur C .

tout entier ; dans ce cas il nous arrivera de préciser en parlant de \bar{x} comme minimum
 d'un *minimiseur global* (ou *absolu*) de f sur C . minimiseur
global

1.1.5. Aspects conditions nécessaires d'optimalité — Une condition nécessaire de minimalité est un énoncé du style : «*Si \bar{x} est un minimum (local) de f sur C , alors quelque chose se passe* (ce quelque chose est noté P)». Plus l'assertion P est précise et mieux c'est. Faisons une analogie avec l'inclusion des ensembles (cf. Figure 1.3) : l'ensemble S des solutions de notre problème est contenu dans l'ensemble des points vérifiant P (si \bar{x} est dans S , il est nécessairement dans P) ; dans le cas illustré à la figure 1.3, l'ensemble correspondant à P_2 (contient toujours S mais) est plus informatif que l'ensemble correspondant à P_1 . Prenons un exemple en considérant une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur \mathbb{R} : si \bar{x} est un minimiseur local de f (points de l'ensemble S), alors $f'(\bar{x}) = 0$ (voici la propriété P_1) ; mais aussi : si \bar{x} est un minimiseur local de f , alors $f'(\bar{x}) = 0$ et $f''(\bar{x}) \geq 0$ (cette assertion P_2 est plus précise que P_1).

Détecter les points vérifiant une condition nécessaire de minimalité est un pas important dans la résolution du problème d'optimisation (\mathbb{P}). Toutefois il faut se garder d'en tirer des conclusions trop hâtives quant à l'existence de solutions de (\mathbb{P}) : par exemple, $\bar{x} = 0$ est le seul point de \mathbb{R} vérifiant la condition nécessaire de minimalité $f'(\bar{x}) = 0$ pour la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) := x^3$; pourtant il n'y a aucun point minimisant f sur \mathbb{R} .

1.1.6. Aspects conditions suffisantes d'optimalité — Une condition suffisante de minimalité est un énoncé du style : «*Si quelque chose se passe* (ce

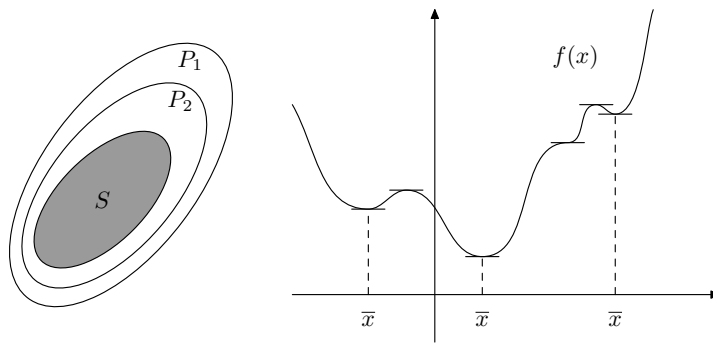


FIGURE 1.3.

quelque chose est noté P), alors \bar{x} est un minimiseur (local) de f sur C ». Plus l’assertion P est lâche et plus il est facile de s’en servir. En général, les formulations de conditions suffisantes diffèrent de celles des conditions nécessaires mais conservent avec elles un lien de parenté. Pour reprendre l’exemple du point précédent, si \bar{x} vérifie $f'(\bar{x}) = 0$ et $f''(\bar{x}) > 0$ (c’est notre propriété P), alors \bar{x} est un minimiseur local de f .

Ce qui arrive souvent est qu’on ait une condition nécessaire d’optimalité (notée P_N) et une condition suffisante d’optimalité (notée P_S) qui diffèrent et «encadrent» les solutions du problème d’optimisation (ensemble noté S). Un point \bar{x} peut vérifier P_N (la condition nécessaire d’optimalité est satisfaite) et ne pas vérifier P_S (on ne peut décider à partir de la condition suffisante d’optimalité) : c’est une situation où on ne peut conclure, \bar{x} peut être une solution ($\bar{x} \in S$) comme il peut ne pas l’être ; voir le schéma de la figure 1.4.

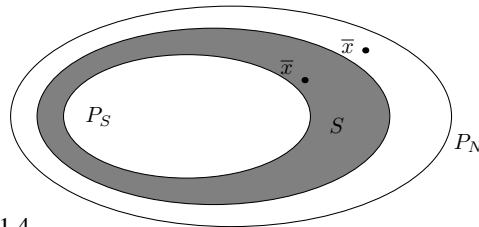


FIGURE 1.4.

Dans l’exemple évoqué, que peut-on dire (quant au statut d’être mi-