I

FONDEMENTS MATHÉMATIQUES

Jean HLADIK Pierre-Emmanuel HLADIK

Chapitre 1

NOMBRES COMPLEXES, DUAUX ET BIRÉELS

Les *quaternions* ont été découverts en 1843 par le mathématicien et physicien irlandais William Rowan Hamilton (1805-1865). Celui-ci fut le fondateur de la théorie des nombres complexes qu'il définit comme des couples de nombres réels. Ses travaux sur l'interprétation géométrique dans le plan des propriétés des nombres complexes le conduisirent à rechercher de nouveaux nombres qui permettraient d'interpréter les transformations géométriques de l'espace à trois dimensions en termes d'opérations algébriques. Avant d'étudier ces nombres, appelés quaternions, rappelons quelques propriétés des trois catégories de nombres de dimension deux : *nombres complexes, nombres duaux et nombres biréels*, qui sont à la base des structures de dimension supérieure.

1.1 GÉOMÉTRIE DES NOMBRES COMPLEXES

Par définition, le nombre i est une racine de l'équation $x^2 = -1$, soit $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Ce nombre i sera toujours écrit par la suite en caractère droit pour ne pas le confondre avec le quaternion unitaire *i* écrit en italique. Un nombre complexe z s'écrit sous la forme algébrique $z = a + \mathrm{i}b$, où a et b sont des nombres réels. Le réel a est appelé la partie réelle de z et notée $\Re(z)$; le réel b est sa partie imaginaire, notée $\Im(z)$.

1.1.1 Représentation dans le plan complexe

L'interprétation géométrique des opérations algébriques portant sur les nombres complexes s'effectue en représentant ces nombres dans le plan complexe. L'axe des abscisses dans ce plan indique la partie réelle des nombres complexes ; l'axe des ordonnées, leur partie imaginaire (Figure 1.1).

Le vecteur **OM**, de composantes (a, b), représente le nombre complexe $z = (a + \mathrm{i}b)$ écrit sous la forme algébrique cartésienne. Sous forme vectorielle, on écrit également $z = (a, b)$.

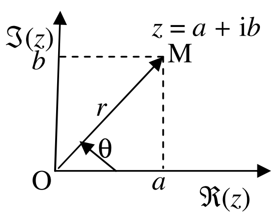

Figure 1.1

Les coordonnées polaires du point M sont définies par la longueur r du vecteur **OM** et l'angle

θ ainsi que le montre la figure 1.1.

Un nombre complexe peut ainsi être représenté en coordonnées polaires soit sous la forme trigonométrique :

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.1.1}$$

soit sous forme d'une exponentielle imaginaire : $z = r \exp \mathrm{i}\theta$. L'angle θ s'appelle l'argument de z et r est la norme de z.

1.1.2 Nombre complexe conjugué

Le nombre complexe conjugué de z, noté z^*, est défini par :

$$z^* = (a + \mathrm{i}b)^* = a - \mathrm{i}b \tag{1.1.2}$$

Il est noté avec une étoile sur le côté du nombre complexe. Le produit d'un nombre complexe par son conjugué est égal à :

$$zz^* = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2 \tag{1.1.3}$$

Sous forme exponentielle, on a :

$$zz^* = (r \exp \mathrm{i}\theta)(r \exp -\mathrm{i}\theta) = r^2 \tag{1.1.4}$$

La conjugaison d'un nombre complexe z, soit : $z \to z^* = a - \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b'$, s'interprète géométriquement comme une *réflexion* par rapport à l'axe des abscisses : $a' = a$, $b' = -b$. L'image du conjugué est le symétrique du point M (Figure 1.1) représentant z par rapport à cet axe.

1.1.3 Norme d'un nombre complexe

La norme de $z = a + \mathrm{i}b$ est définie par :

$$N(z) = \|z\| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.1.5}$$

La norme de z est égale à la longueur r du vecteur **OM** (Figure 1.1) ce qui apparaît immédiatement sous la forme exponentielle : $z = r \exp(\mathrm{i}\theta)$, la norme d'une exponentielle imaginaire étant égale à l'unité. On a donc : $\|z\| = r$.

La norme de z est encore appelée le *module* de z. L'ensemble des nombres complexes formant un espace vectoriel, autant utiliser la terminologie classique de norme des vecteurs.

Les propriétés géométriques des nombres complexes viennent du fait que la norme euclidienne $N(z)$, définie par (1.1.5), leur confère la propriété :

$$N(z_1 z_2) = N(z_1)\, N(z_2) \tag{1.1.6}$$

La norme du produit de deux nombres complexes z_1 et z_2 est égale au produit des normes de chacun des nombres complexes. La vérification de cette propriété est immédiate en utilisant l'expression d'un nombre complexe sous la forme : $z = r \exp(\mathrm{i}\theta)$. On a :

$$z_1 z_2 = r_1 \exp(\mathrm{i}\theta_1)\, r_2 \exp(\mathrm{i}\theta_2) = r_1 r_2 \exp[\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)] \tag{1.1.7}$$

d'où, selon (1.1.5) et (1.1.4) :

$$N(z_1 z_2) = \sqrt{(z_1 z_2)(z_1 z_2)^*} = \sqrt{r_1{}^2 r_2{}^2} = r_1 r_2 = N(z_1) N(z_2) \tag{1.1.8}$$

1.1.4 Rotation d'un nombre complexe dans un référentiel fixe

Le système d'axes de coordonnées représenté sur la figure 1.1 forme un *référentiel* situé dans un plan. Ce référentiel peut être fixe ou mobile par rapport au plan. On considère dans cette partie 1.1.4 que le référentiel est fixe.

Les nombres complexes de norme unité sont de la forme : $z_0 = \exp(\mathrm{i}\theta_0)$. La multiplication d'un nombre complexe $z = r\exp(\mathrm{i}\theta)$ par z_0 s'écrit :

$$z_1 = zz_0 = r\exp[\mathrm{i}(\theta + \theta_0)] \tag{1.1.9}$$

La norme r de z_1 reste égale à celle de z. Pour des valeurs θ_0 variant continûment, le point M, représentant z, parcourt donc dans le plan complexe un cercle de rayon r centré sur l'origine. La multiplication par un nombre complexe z_0 de module unité s'interprète géométriquement comme une *rotation* dans un plan, centrée sur l'origine, d'un angle égal à l'argument de z_0.

Expression trigonométrique de la rotation — Écrivons z_0 et z sous forme trigonométrique, soit :

$$z_0 = \cos\theta_0 + \mathrm{i}\sin\theta_0 \quad ; \quad z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = a + \mathrm{i}b \tag{1.1.10}$$

Après rotation d'un angle θ_0, le vecteur représentatif de z se transforme en un vecteur z_1 qui fait un angle $(\theta + \theta_0)$ par rapport à l'axe des abscisses, d'où :

$$z_1 = zz_0 = r[\cos(\theta + \theta_0) + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta_0)] = a_1 + \mathrm{i}b_1 \tag{1.1.11}$$

En utilisant les formules trigonométriques usuelles [Hla1] on obtient les coordonnées du vecteur représentatif de z_1 sous la forme :

$$a_1 = r\cos(\theta + \theta_0) = r\cos\theta\cos\theta_0 - r\sin\theta\sin\theta_0 = a\cos\theta_0 - b\sin\theta_0 \tag{1.1.12}$$

$$b_1 = r\sin(\theta + \theta_0) = r\sin\theta\cos\theta_0 + r\cos\theta\sin\theta_0 = b\cos\theta_0 + a\sin\theta_0 \tag{1.1.13}$$

On peut obtenir directement ces dernières expressions en effectuant le produit zz_0 sous la forme :

$$\begin{aligned} zz_0 &= (a + \mathrm{i}b)(\cos\theta_0 + \mathrm{i}\sin\theta_0) \\ &= (a\cos\theta_0 - b\sin\theta_0) + \mathrm{i}(b\cos\theta_0 + a\sin\theta_0) \\ &= a_1 + \mathrm{i}b_1 = z_1 \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

1.1.5 Rotation du référentiel par rapport au plan

Considérons à présent le référentiel de la figure 1.1 qui effectue une rotation dans le plan d'un angle θ_0 dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. La figure 1.2 montre ce nouveau référentiel dessiné par des tirets. Le point M est fixe dans le plan et acquiert de nouvelles coordonnées dans ce nouveau référentiel. Notons a_2 et b_2 ces coordonnées. Le nombre complexe z_2 représenté dans le nouveau référentiel par le vecteur **OM** est noté : $z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$.

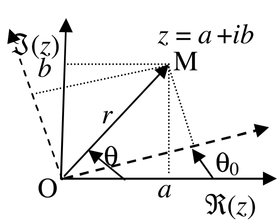

Figure 1.2

On voit sur la figure 1.2 que le vecteur **OM** fait à présent un angle $(\theta - \theta_0)$ avec l'axe des abscisses du nouveau référentiel. On a donc :

$$a_2 = r\cos(\theta - \theta_0) \quad ; \quad b_2 = r\sin(\theta - \theta_0) \tag{1.1.15}$$

Le développement de ces expressions nous donne :

$$a_2 = r\cos(\theta - \theta_0) = r\cos\theta\cos\theta_0 + r\sin\theta\sin\theta_0 \tag{1.1.16}$$

$$b_2 = r\sin(\theta - \theta_0) = r\sin\theta\cos\theta_0 - r\cos\theta\sin\theta_0 \tag{1.1.17}$$

Introduisons dans ces expressions les coordonnées de $z = a + \mathrm{i}b$ données par (1.1.1). Il vient :

$$a_2 = r\cos\theta\cos\theta_0 + r\sin\theta\sin\theta_0 = a\cos\theta_0 + b\sin\theta_0 \tag{1.1.18}$$

$$b_2 = r\sin\theta\cos\theta_0 r - r\cos\theta\sin\theta_0 = b\cos\theta_0 - a\sin\theta_0 \tag{1.1.19}$$

L'expression de z_2 s'écrit alors :

$$z_2 = (a\cos\theta_0 + b\sin\theta_0) + \mathrm{i}(b\cos\theta_0 - a\sin\theta_0) \tag{1.1.20}$$

Cherchons z_2 sous la forme du produit zz_3, avec $z_3 = c + \mathrm{i}d$. On obtient :

$$z_2 = zz_3 = (a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc) \tag{1.1.21}$$

En identifiant (1.1.20) et (1.1.21), on obtient :

$$c = \cos\theta_0 \quad ; \quad d = -\sin\theta_0 \tag{1.1.22}$$

Le nombre complexe z_3 a pour expression : $z_3 = \cos\theta_0 - \mathrm{i}\sin\theta_0$. C'est le complexe conjugué de z_0 défini précédemment au (1.1.10). On a donc pour expression du nombre complexe z_2 dans le nouveau référentiel après rotation :

$$\begin{aligned} z_2 = z\bar{z}_0 &= (a + \mathrm{i}b)(\cos\theta_0 - \mathrm{i}\sin\theta_0) \\ &= (a\cos\theta_0 + b\sin\theta_0) + \mathrm{i}(b\cos\theta_0 - a\sin\theta_0) \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

1.1.6 Représentation matricielle des rotations dans un plan

Le système d'équations (1.1.12) et (1.1.13) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{1.1.24}$$

La matrice colonne de droite représente le vecteur **OM** (Figue 1.1) que l'on note **r** ; ses composantes sont (a, b). La matrice colonne de gauche représente le vecteur **r** après rotation d'un angle θ_0, vecteur que l'on note $\mathbf{r}_1$ et ayant pour composantes (a_1, b_1).

La matrice 2×2 est la *matrice de rotation* d'un angle θ_0 du vecteur **r**. On note $[\mathrm{R}(\theta_0)]$ cette matrice, d'où :

$$[\mathrm{R}(\theta_0)] = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \tag{1.1.25}$$

La relation matricielle (1.1.25) s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{r}_1 = [\mathrm{R}(\theta_0)]\,\mathbf{r} \tag{1.1.26}$$

De même, la matrice de rotation du référentiel s'obtient en mettant les équations (1.1.18) et (1.1.19) sous une forme analogue à (1.1.24). On obtient la matrice de rotation du référentiel sous la forme :

$$[\mathrm{R}(\theta_0)]^T = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \tag{1.1.27}$$

Cette dernière matrice est la *matrice transposée* de [R], d'où sa notation $[\mathrm{R}]^T$. Le déterminant des matrices [R] et $[\mathrm{R}]^T$ est égal à $(\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0) = 1$.

1.2 CONSTRUCTION DES NOMBRES COMPLEXES

Les quaternions vont être définis au cours du chapitre 2 en suivant une méthode de construction analogue à celle des nombres complexes. Il est donc intéressant de rappeler la façon dont on peut construire l'ensemble des nombres complexes. Différentes méthodes existent et nous considérons celle qui est faite à partir de couples de nombres réels munis de l'addition et de la multiplication.

1.2.1 Espace vectoriel $\mathbf{R}^2$

La notion d'espace vectoriel est l'une des plus utilisée en physique. Nous renvoyons le lecteur à notre ouvrage[1] pour une étude détaillée du calcul vectoriel à trois dimensions ainsi que dans des espaces à *n* dimensions.

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels ; les couples $z = (a, b)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^2$. Pour que $\mathbb{R}^2$ devienne un espace vectoriel sur le corps des nombres réels, il faut *définir* les deux opérations suivantes sur ses éléments, à savoir l'addition entre deux couples de $\mathbb{R}^2$ et leur multiplication par les nombres réels. Par définition, on a pour l'addition :

$$z + z' = (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \tag{1.2.1}$$

D'autre part, à tout couple (α, β) d'éléments du corps des nombres réels $\mathbb{R}$, on définit les propriétés multiplicatives suivantes vis-à-vis de tout couple $z = (a, b)$:

$$\alpha(z + z') = \alpha z + \alpha z' \ ; \ (\alpha + \beta)z = \alpha z + \beta z \ ; \ \alpha(\beta z) = \alpha\beta z \ ; \ 1.z = z \tag{1.2.2}$$

L'ensembles des couples de $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois de composition devient un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Cet espace vectoriel est noté $\mathbb{R}^2(+, .)$. On dit que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De façon implicite lorsque nous parlerons par la suite d'espace vectoriel, il s'agira d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, sauf spécification contraire.

---

[1] J. HLADIK, *Le calcul vectoriel en physique*, Ellipses, 1993.

1.2.2 Algèbre C des nombres complexes

Par définition, une *algèbre* sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est un espace vectoriel où l'on définit une loi de composition interne, appelée multiplication que l'on note provisoirement par le symbole $\times$.

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2(+, .)$ et munissons le d'un loi multiplicative définie par :

$$zz' = (a, b) \times (a', b') = (aa' - bb',\ ab' + ba') \qquad (1.2.3)$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2(+, .)$ devient ainsi une algèbre que l'on note $\mathbb{C}$. On dit que c'est une $\mathbb{R}$-algèbre. Cette algèbre est appelée l'*algèbre* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes*. On dira plus simplement $\mathbb{C}$.

1.2.3 Notation algébrique cartésienne

Les nombres complexes $(a, 0)$ forment un sous-espace de $\mathbb{C}$ qui est isomorphe au corps des nombres réels par l'application qui au couple $(a, 0)$ fait correspondre a. Les nombres complexes $(a, 0)$ peuvent ainsi être identifiés aux nombres réels a.

Le nombre complexe $(0, 1)$, noté i, vérifie $\mathrm{i}^2 = (-1, 0) = -1$ lorsqu'on applique la formule (1.2.3) de définition de la multiplication. On a en effet :

$$(0,1) \times (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) \qquad (1.2.4)$$

et le couple $(-1, 0)$ est alors identifié au nombre -1.

Tout nombre complexe $z = (a, b)$ s'écrit sous la forme $(a + \mathrm{i}b)$ puisque la loi d'addition (1.2.1) nous donne :

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + \mathrm{i}b \qquad (1.2.5)$$

Tout nombre complexe $z = (x, y)$ s'écrit donc sous la forme $z = x + \mathrm{i}y$. On dit, dans ce cas, que le nombre complexe z est écrit sous la forme algébrique cartésienne.

Tout vecteur d'un espace vectoriel peut être décomposé sur des vecteurs de base. L'espace vectoriel $\mathbb{C}(+, .)$ a pour base les vecteurs :

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0) = 1 \quad ; \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1) = \mathrm{i} \qquad (1.2.6)$$

C'est un espace de dimension 2. La décomposition des nombres complexes sur la base apparaît directement sur leur forme algébrique cartésienne, à savoir :

$$z = a.1 + b.\mathrm{i} = a + \mathrm{i}b \qquad (1.2.7)$$

1.3 CONSTRUCTION DES NOMBRES DUAUX

En 1873, William Clifford (1845-1879) introduisit les nombres duaux qui peuvent être construits en suivant une méthode analogue à celle des nombres complexes [Cli1]. Partant des travaux de Clifford, Aleksandr Kotelnikov [Kot1] et Eduard Study [Stu1] développèrent dans les années 1900 les vecteurs duaux ainsi que les quaternions duaux pour l'étude de la mécanique.

1.3.1 Algèbre des nombres duaux

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2(+, .)$ formé par les couples ordonnés (a, b) de nombres réels qui nous ont servi pour la construction des nombres complexes. Soit deux couples $\hat{a} = (a, b)$ et $\hat{c} = (c, d)$. Munissons cet espace vectoriel d'une loi de composition interne appelée multiplication et définie par :

$$\hat{a} \times \hat{c} = (a, b) \times (c, d) = (ac, ad + bc) \tag{1.3.1}$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2(+, .)$ devient ainsi une algèbre que l'on note $\mathbb{D}$. Les éléments de cette algèbre sont appelés des *nombres duaux*. Afin de simplifier l'écriture de la multiplication, on supprime le symbole $\times$ en écrivant : $\hat{a}\hat{c} = (a, b)(c, d) = (ac, ad + bc)$. Cette simplification est identique à celle que l'on fait pour les nombres complexes lorsqu'on écrit $zz' = (aa' - bb',\ ab' + ba')$. Puisque l'on connaît la signification des symboles employés, il n'y a pas d'ambiguïté sur le type de multiplication à utiliser.

1.3.2 Propriétés des nombres duaux

La multiplication définie par la formule (1.3.1) est commutative. On a en effet :

$$\hat{a}\hat{c} = (a, b)\,(c, d) = (ac, ad + bc) = (ca, da + cb) = (c, d)\,(a, b) = \hat{c}\hat{a} \tag{1.3.2}$$

On vérifie aisément que cette multiplication est associative, soit :

$$\hat{a}(\hat{c}\hat{e}) = (\hat{a}\hat{c})\hat{e} \tag{1.3.3}$$

On vérifie également la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Élément neutre de la multiplication — Le couple $(1, 0)$ est un vecteur de la base naturelle de $\mathbb{D}$. Ce couple est l'élément neutre de la multiplication. On a en effet en utilisant la formule (1.3.1) :

$$(1, 0)\,(a, b) = (1a, 1b + 0a) = (a, b) \tag{1.3.4}$$

La propriété de commutativité nous donne également :

$$(1, 0)\,(a, b) = (a, b)\,(1, 0) = (a, b) \tag{1.3.5}$$

1.3.3 Notation algébrique

La base naturelle de $\mathbb{R}^2(+, .)$ est formée par les vecteurs unitaire $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ et $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Les vecteurs de base de l'algèbre $\mathbb{D}$ sont notés : $\hat{e}_1 = (1, 0)$ et $\hat{e}_2 = (0, 1)$. Ces vecteurs sont des nombres duaux. Effectuons la multiplication de $\hat{e}_2 = (0, 1)$ par un nombre dual $\hat{a} = (a, 0)$. Selon (1.3.1), il vient :

$$\hat{e}_2\hat{a} = (0, 1)\,(a, 0) = (0a, 0.0 + 1a) = (0, a) \tag{1.3.6}$$

En utilisant les formules (1.3.5) et (1.3.6), tout couple (a, b) peut s'écrire sous la forme :

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (1, 0)\,(a, 0) + (0, 1)\,(b, 0) \tag{1.3.7}$$