Partie 1

Mathématiques

Algèbre et géométrie euclidienne

Logique

Assertions

*Une **assertion mathématique** est une application d'un ensemble de variables, à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{V, F\}$. Une assertion $P : E \to \{V, F\}$ est aussi appelée une **propriété des éléments** de E.*

Connecteurs logiques élémentaires

La négation, la disjonction, la conjonction, l'implication et l'équivalence de deux assertions sont définies par leurs tables de vérité :

P	Q	non P	P ou Q	P et Q	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Propriétés des connecteurs logiques élémentaires

- $P\,ou\,Q \iff Q\,ou\,P$
- $P\,et\,Q \iff Q\,et\,P$

P, Q et R trois assertions. La conjonction et la disjonction sont commutatives.

- $(P\,ou\,Q)\,ou\,R \iff P\,ou\,(Q\,ou\,R)$
- $(P\,et\,Q)\,et\,R \iff P\,et\,(Q\,et\,R)$

La conjonction et la disjonction sont associatives.

- $P\,et\,(Q\,ou\,R) \iff (P\,et\,Q)\,ou\,(P\,et\,R)$
- $P\,ou\,(Q\,et\,R) \iff (P\,ou\,R)\,et\,(P\,ou\,R)$

La conjonction et la disjonction sont distributives l'une sur l'autre.

- $P \iff non(nonP)$
- $non(P \text{ ou } Q) \iff (non\ P \text{ et } non\ Q)$
- $non(P \text{ et } Q) \iff (non\ P \text{ ou } non\ Q)$

Les deux dernières assertions sont les lois de Morgan.

Quantificateurs

Les propriétés d'un ensemble E sont de l'un des deux types suivants :

- ***Existentiel :*** *il existe un élément de E vérifiant P. On note $\exists x \in E \quad P(x)$.*
- ***Universel :*** *tous les éléments de E vérifient P. On note $\forall x \in E \quad P(x)$.*

S'il existe un unique élément de E vérifiant P, on note $\exists!\ x \in E,\ P(x)$.

Règles de calcul pour les quantificateurs

- $non\ \big(\exists x \in E;\ \ P(x)\big) \iff \big(\forall x \in E,\ \ non\ P(x)\big)$
- $non\ \big(\forall x \in E,\ \ P(x)\big) \iff \big(\exists x \in E;\ \ non\ P(x)\big)$
- $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y) \iff \forall y \in F,\ \forall x \in E\ ,P(x,y)$
- $\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) \iff \exists y \in F,\ \exists x \in E\ ,P(x,y)$

Stratégies pour une implication

$\Updownarrow$
- $P \Rightarrow Q$
- $(non\ P)$ *ou* Q
- $non\ Q \Rightarrow non\ P$
- $non\big[P \text{ et } non\ Q\big].$

Ces équivalences sont utiles pour démontrer $P \Rightarrow Q$ par contraposée, ou par l'absurde.

Ensembles

Parties d'un ensemble

E un ensemble, A, B, C des parties de E. On dit que

- *A est* ***inclus*** *dans B ($A \subset B$) si tout élément de A appartient à B.*
- *A et B sont* ***égaux*** *($A = B$), lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$.*

Opérations élémentaires sur les parties

- $A \cup B = \{x \in E |\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$ *est la* ***réunion*** *de A et B.*
- $A \cap B = \{x \in E |\ x \in A \text{ et } x \in B\}$ *est l'****intersection*** *de A et B.*
- $\complement_E A = \{x \in E |\ x \notin A\}$, *est le* ***complémentaire*** *de A dans E.*
- $A \setminus B = \{x \in E |\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$ *est la* ***différence*** *de A et B.*

Propriétés des opérations élémentaires

- L'intersection est distributive sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- La réunion est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

- $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
- $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Lois de Morgan

Fonction indicatrice d'une partie

Pour tout $x \in E$, on note

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}.$$

$\mathbf{1}_A : E \to \{0,1\}$ est la fonction indicatrice de A.

- $\mathbf{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbf{1}_A$
- $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \, \mathbf{1}_B$
- $\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A \, (1 - \mathbf{1}_B)$
- $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \, \mathbf{1}_B$

Produit cartésien de deux ensembles

Soit E, F deux ensembles, le ***produit cartésien*** *de E et F est l'ensemble défini par $E \times F = \{(x,y)\,;\; x \in E, y \in F\}$. L'égalité de deux couples (x,y) et (x',y') est définie par $(x,y) = (x',y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.*

Applications

Application injective, surjective

Une application $f : E \to F$ est dite :

- ***injective*** *si $\big(\forall (x,x') \in E \times E\big),\ \big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big)$;*
- ***surjective*** *si $(\forall y \in F)$, $(\exists x \in E)$; $y = f(x)$.*

Composée d'applications et injectivité, surjectivité

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

- f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective.
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
- f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective.
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Application bijective

Une application $f : E \to F$ est dite ***bijective*** *si elle est à la fois injective et surjective, i.e. $(\forall y \in F)$, $(\exists!\, x \in E)$; $y = f(x)$.*

Application réciproque d'une bijection

Soit $f : E \to F$ une ***bijection****. On définit une application $f^{-1} : F \to E$, appelée* ***application réciproque*** *de f, par*

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ \begin{cases} y \in F \\ x = f^{-1}(y) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in E \\ y = f(x) \end{cases}.$$

$$f \text{ bijective} \iff \exists g : F \to E \quad \begin{matrix} f \circ g = Id_F \\ g \circ f = Id_E \end{matrix}$$

En ce cas, $g = f^{-1}$ est l'application réciproque de f.

Composée de bijections

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

$$f \text{ et } g \text{ bijectives} \Rightarrow g \circ f \text{ bijective}$$

et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Image directe et image réciproque d'une partie

Soit $f : E \to F$ une application, $A \subset E,\ B \subset F$.

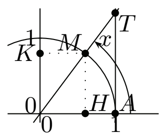
- *L'**image directe** de A par f est le sous-ensemble de F défini par*
$$f(A) = \{f(x)\,;\ x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A; y = f(x)\}.$$
- *L'**image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de E défini par*
$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Trigonométrie circulaire

Le cercle trigonométrique

$x \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$

- $\cos(x) = \overline{OH}$, $\sin(x) = \overline{OK}$
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$



Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Formules fondamentales de trigonométrie circulaire

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ et } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Propriétés de symétrie

- $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Formules d'addition

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de duplication

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\tan(2a) = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Formules de linéarisation

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]$
- $\cos^2 a = \frac{1}{2}\big[1 + \cos(2a)\big]$
- $\sin^2 a = \frac{1}{2}\big[1 - \cos(2a)\big]$

Formules de factorisation

- $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

Nombres complexes

Notation algébrique des nombres complexes

$$\forall z \in \mathbf{C}\ \exists!(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ z = x + iy$$

$x = \mathfrak{Re}\,(z)$ est la **partie réelle** $y = \mathfrak{Im}\,(z)$ est la **partie imaginaire** de z.

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}\, z = \mathfrak{Re}\, z' \\ \mathfrak{Im}\, z = \mathfrak{Im}\, z' \end{cases}$$

z, z' sont deux nombres complexes.

- *Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est le **conjugué** de z.*
- *Le nombre réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le **module** de z.*

Nombres complexes de module 1

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$\theta \in \mathbf{R}$, $e^{i\theta}$ *est l'**exponentielle imaginaire (pure)** d'angle θ.*

- Pour tout nombre complexe z de module 1, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$
- Pour tout couple $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$ de réels, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \quad [2\pi]$

Règle de calcul pour l'exponentielle imaginaire

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$$

$(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$

Formules d'Euler et de Moivre

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
- $\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin n(\theta)$

Notation exponentielle d'un complexe non nul

$\forall z \in \mathbf{C}^\star,\ \exists(\rho,\theta) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R},\ z = \rho e^{i\theta}$	**Forme exponentielle** du nombre complexe non nul z.

*Si $z \in \mathbf{C}^\star$ s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ alors ρ est le **module** de z et θ est appelé un **argument** de z. On note* $\arg(z)$ *un argument quelconque de z.*

$z = z' \iff \begin{cases} \lvert z\rvert = \lvert z'\rvert \\ \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$	$(z, z') \in \mathbf{C}^\star \times \mathbf{C}^\star$

Exponentielle d'un complexe quelconque

Soit $z = x + iy$ un complexe présenté en notation algébrique. On définit

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big).$$

$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$	$(z, z') \in \mathbf{C}^2$

Racines nièmes du nombre complexe 1

Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. On note $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.	*ω_n est l'exponentielle imaginaire d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.*
$\mathbf{U}_n = \{\omega_n^k; k \in \mathbf{Z}\} = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\}$	$\mathbf{U}_n$ est l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.
$1 + \omega_n + \omega_n^2 + \cdots + \omega_n^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = 0$	La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est nulle.

Racines nièmes d'un complexe

L'ensemble des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de $a \in \mathbf{C}^\star$ est :

$$\begin{aligned}
\mathscr{S} &= \{\zeta_0\,\omega_n^k;\ k \in \mathbf{Z}\} = \{\zeta_0,\ \zeta_0\,\omega_n,\ \zeta_0\,\omega_n^2, \ldots,\ \zeta_0\,\omega_n^{n-1}\} \\
&= \{\sqrt[n]{\lvert a\rvert}\, e^{i\frac{\arg a}{n}},\ \sqrt[n]{\lvert a\rvert}\, e^{i\frac{\arg a + 2\pi}{n}}, \ldots,\ \sqrt[n]{\lvert a\rvert}\, e^{i\frac{\arg a + 2(n-1)\pi}{n}}\}
\end{aligned}$$

où ζ_0 est une solution *particulière* de $z^n = a$, par exemple $\zeta_0 = \sqrt[n]{\lvert a\rvert}\, e^{i\frac{\arg a}{n}}$.

Équations polynomiales de degré 2

$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$	$(a, b, c) \in \mathbf{C}^\star \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, δ est l'une des racines carrées (complexes) de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Système somme-produit

Soit $(\sigma, \rho) \in \mathbf{C}^2$. Alors le couple (z_1, z_2) est solution du système $\begin{cases} z_1 + z_2 = \sigma \\ z_1 \times z_2 = \rho \end{cases}$ si et seulement si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - \sigma z + \rho = 0$.

Nombres complexes et géométrie

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé direct.

- *Au point $M\binom{x}{y}_{\mathcal{R}}$, on associe son **affixe**, le nombre complexe $z = x + iy$.*
- *À $z = x + iy$, on associe son **image** dans le plan, le point $M\binom{x}{y}_{\mathcal{R}}$.*

- L'application $z \mapsto z + u$ correspond à la translation du vecteur d'affixe u.
- L'application $z \mapsto \bar{z}$ correspond à la réflexion par rapportl'axe des abscisses.
- L'application $z \mapsto az + b$, avec $a \neq 1$ correspond à la similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

Géométrie élémentaire dans le plan

Modes de repérage dans le plan

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct (ROND) du plan.

Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on définit $\vec{u}_\theta = \cos(\theta) \cdot \vec{\imath} + \sin(\theta) \cdot \vec{\jmath}$ et $\vec{v}_\theta = -\sin(\theta) \cdot \vec{\imath} + \cos(\theta) \cdot \vec{\jmath}$

Soit M le point de **coordonnées cartésiennes** (x, y) dans $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath}$.
Il existe un couple $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = \rho\, \vec{u}_\theta$.

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\theta) \\ y &= \rho \sin(\theta) \end{aligned}$$

(ρ, θ) est un système de **coordonnées polaires** pour M.

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $R = (\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ des ROND. Soit $M \in \mathcal{P}$ un point du plan tel que $M\binom{x}{y}_{\mathcal{R}}$, $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_R$, $\Omega\binom{x_\Omega}{y_\Omega}_{\mathcal{R}}$. Les coordonnées de M dans les repères $\mathcal{R}$ et R sont liées par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \cos(\theta)\,(x - x_\Omega) + \sin(\theta)\,(y - y_\Omega) \\ Y = -\sin(\theta)(x - x_\Omega) + \cos(\theta)\,(y - y_\Omega) \end{array} \right.$$

$\theta \equiv (\vec{\imath}, \vec{I})\ [2\pi]$ est une mesure de l'angle orienté entre $\vec{\imath}$ et $\vec{I}$.

Produit scalaire et déterminant de deux vecteurs

Lorsque $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, on pose $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Sinon

- *le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos(\vec{u}, \vec{v})$;*
- *le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par* $\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\sin(\vec{u}, \vec{v})$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff (\vec{u} \mid \vec{v}) = 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

$\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$ deux vecteurs du plan

Expression du produit scalaire et du déterminant

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée directe (BOND) du plan.

- $(\vec{u} \mid \vec{v}) = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2$
- $\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 \times v_2 - u_2 \times v_1$

$\vec{u} = u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2$
$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2$