Chapitre 1

Courbes du plan et de l'espace

Dans ce premier chapitre le concept de courbe du plan et de l'espace est introduit à l'aide des fonctions vectorielles d'une variable, définissant ainsi la notion de courbe paramétrée (1.1). Cette notion prend un sens physique clair lorsqu'on considère une paramétrisation comme le déplacement d'un point mobile. Ainsi à partir d'une description élémentaire du mouvement on peut obtenir les équations paramétriques de la courbe (1.1.1) et la représenter, soit en faisant une étude précise (voir Annexe A), soit en la traçant directement à l'aide de *Matlab* [1]. Ces courbes étant définies par des fonctions vectorielles, le théorème de Taylor-Young permet, comme pour les fonctions réelles, d'en étudier le comportement local.

La paramétrisation d'une courbe n'est jamais unique ; il faut donc définir ce qu'est une « bonne paramétrisation » . Cela se fait à l'aide des notions de courbe rectifiable et de longueur (1.1.2). Une fois cette notion introduite, on en déduit deux caractéristiques géométriques d'une courbe : la courbure et la torsion. La courbure et la torsion sont des invariants géométriques de la courbe qui la déterminent complètement. La section 1.1.3 se termine par l'interprétation suivante – remarque 1.1.44 – : *« Une courbe de l'espace est une droite ou un segment qu'on courbe et qu'on tord »* .

Dans la section 1.2 est présenté un cas particulier de courbes paramétrées : les courbes de Bézier. Ces modèles de courbes sont historiquement au cœur des logiciels de CAO (voir [Bez86, Cas85, Coo87]) et possèdent des propriétés remarquables déduites d'un algorithme fondateur, dit de De Casteljau (1.2.1). Cet algorithme se traduit paramétriquement (1.2.2) ce qui permet d'appliquer

1. Nous utiliserons le logiciel *Matlab* pour toutes les applications machines. Les scripts sont consultables sur `https://sites.google.com/site/geometriespouringenieur/`

à ces courbes les techniques vues en 1.1. Les courbes de Bézier ont donné naissance à de multiples généralisations comme les B-Splines (1.2.3).

1.1 Courbes paramétrées

Soit n un entier, en général $n = 2$ ou $n = 3$, et I un intervalle réel. On considère une fonction vectorielle γ de la variable réelle t définie comme suit :

$$\gamma : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t)) \end{cases}$$

L'ensemble Γ des points M de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $\gamma(t)$, avec $t \in I$, s'appelle support de la *courbe paramétrée* (I, γ). Pour $n = 2$ on parle de courbe dans le plan ou plane et, pour $n = 3$, de courbe dans l'espace ou gauche. En toute rigueur une courbe paramétrée est donc la donnée d'un intervalle I (fini ou non) et d'une application γ de I dans $\mathbb{R}^n$; le support Γ de la courbe (I, γ) correspond à l'image $\Gamma = \gamma(I)$. Lorsque cela ne prête pas à confusion, on parlera de la courbe Γ et de sa paramétrisation γ.

Remarque 1.1.1. Nous ne faisons pas formellement de différence dans cette définition entre le point comme objet géométrique, qui vit dans un espace géométrique, et les coordonnées de ce point, définies par un n-uplet de nombres réels. En paramétrique la donnée de l'objet géométrique se confond avec la donnée de ses coordonnées puisque le point est défini comme l'image d'une application vectorielle. Si on peut passer sous silence cette distinction lorsqu'on travaille en paramétrique il ne peut en être de même dans d'autres géométries. Cette question et sa signification philosophique seront évoquées dans la section 3.2.2 du chapitre 3 de la seconde partie du livre. Dans cette première partie nous marquerons la différence entre le point et ses coordonnées en distinguant lorsque c'est nécessaire le point $M(t)$ de ses coordonnées $\gamma(t)$.

1.1.1 Premiers exemples et étude locale

Exemples

Commençons par des exemples élémentaires.

Exemple 1.1.2. Pour les courbes (γ, I) suivantes on donne la paramétrisation et le support :

1. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t + 1, 2t + 3)$. La courbe paramétrée $(\mathbb{R}, \gamma)$ a pour support la droite d'équation $y = 2x + 1$.

2. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. La courbe paramétrée $([0, 2\pi], \gamma)$ a pour support le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.
3. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$. La courbe paramétrée $([0, 2\pi], \gamma)$ a pour support l'ellipse de centre $(0, 0)$, de demi-grand axe a et de demi-petit axe b.

On se convainc facilement que les supports Γ des paramétrisations ci-dessus sont bien ceux annoncés. Pour voir que $(\mathbb{R}, \gamma)$ avec $\gamma(t) = (t+1, 2t+3)$ admet pour support la droite d'équation $y = 2x + 1$, on remarque d'abord que tout point de Γ, i.e. tout couple $(t_0 + 1, 2t_0 + 3)$ avec $t_0 \in \mathbb{R}$, est bien un point de la droite $y = 2x + 1$ puisque $2t_0 + 3 = 2(t_0 + 1) + 1$. Réciproquement tout point $m(x_0, y_0)$ de la droite d'équation $y = 2x + 1$ a pour coordonnées $(x_0, 2x_0 + 3)$; en choisissant $t_0 = x_0 - 1$ il vient $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ et tout point de la droite appartient à Γ. On peut faire le même raisonnement pour les autres exemples ou se contenter du tracé !

Exercice 1

Tracés de courbes planes sous Matlab.

1. *Écrire une fonction* ellipse(a,b,pas)*, qui renvoie la matrice* points *des coordonnées* $(X(t), Y(t))$ *des points images dans le plan* ellipse(t)*, par la fonction* ellipse*, du vecteur* t.

   Ici t *désigne le vecteur des réels variant entre* a *et* b*, par pas de longueur* pas*. Les vecteurs* $X(t)$ *et* $Y(t)$ *seront transcrits dans la fonction par leur écriture mathématique formelle.*

   On pourra écrire par exemple : $X(t) = 4 * \cos(t)$ *;* $Y(t) = \sin(t)$.
2. *Écrire une fonction* trace2('ellipse',a,b,pas) *qui provoque le tracé de la courbe plane support de la paramétrisation définie sous* ellipse*. On pourra renvoyer par* trace2( ) *le handle de l'objet graphique produit, afin d'être en mesure d'agir ultérieurement sur ses champs.*
3. *Produire le tracé de supports associés à d'autres paramétrisations que la fonction* ellipse *proposée ci-dessus.*

Deux courbes paramétrées disctinctes peuvent avoir le même support ; on dira que la courbe, en tant que support, admet plusieurs paramétrisations.

Exercice 2

Proposer d'autres paramétrisations possibles pour le cercle ou l'ellipse.

Par définition une courbe paramétrée associe à chaque valeur du paramètre t de l'intervalle I, un point du plan ou de l'espace de coordonnées $\gamma(t)$. Le point de coordonnées $\gamma(t)$ peut donc être vu comme un point mobile se déplaçant en fonction d'un paramètre t, souvent appelé temps.

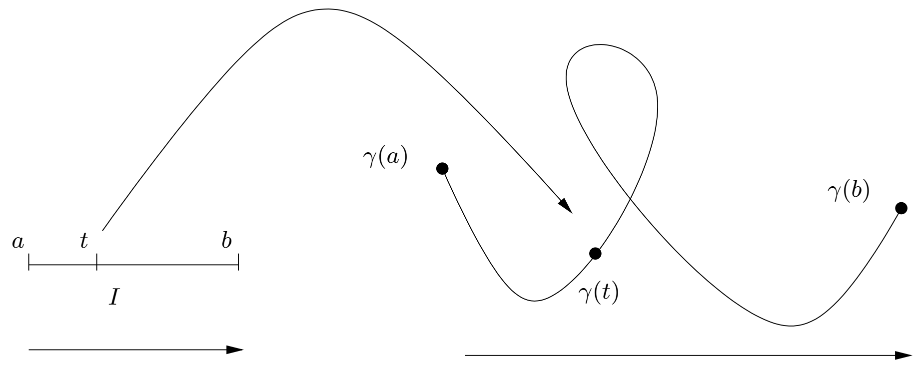

FIGURE 1.1 – Interprétation « physique » d'une courbe paramétrée comme trajectoire d'un point mobile.

Cette approche « physique » de la notion de courbe paramétrée permet d'expliciter les équations paramétriques d'une courbe lorsqu'on sait décrire le mouvemement. La donnée des équations paramétriques revient à décrire la trajectoire du point mobile en fonction du temps.

Exercice 3

Un point M se déplace à vitesse constante, égale à un par exemple, dans le plan le long d'une droite (d) passant par l'origine qui est en rotation uniforme autour de O (origine du plan).

1. *En utilisant votre stylo pour jouer le rôle de la droite (d) et en faisant se déplacer un point imaginaire le long du stylo, dire intuitivement quelle courbe correspond au déplacement de M.*
2. *Établir les équations paramétriques du mouvement de M ; on donnera les équations paramétriques d'un vecteur directeur de (d), noté $\overrightarrow{u}(\theta)$ en fonction de θ l'angle de rotation, puis on écrira que $\overrightarrow{OM} = \theta \times \overrightarrow{u}(\theta)$.*
3. *Tracer cette courbe à l'aide de* Matlab *et comparer le résultat obtenu avec votre intuition initiale.*

L'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant $y = f(x)$, où f est une fonction réelle de la variable réelle définie sur un intervalle I, est encore appelé courbe ; il s'agit de la courbe représentative de f. De telles courbes admettent une paramétrisation évidente donnée par $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ avec $\gamma(x) = (x, f(x))$.

Exemple 1.1.3. La parabole d'équation $y = x^2$ est paramétrée par $\gamma(t) = (t, t^2)$.

Remarque 1.1.4. Les courbes planes données sous forme implicite, du type $f(x, y) = 0$ admettent une paramétrisation, c'est une conséquence du théorème des fonctions implicites [AL77, Gourd94b], mais celle-ci n'est pas toujours facile à déterminer !

Exemple 1.1.5. La cubique cuspidale est la courbe du plan d'équation cartésienne $y^2 = x^3$. Cette courbe peut être paramétrée par $\gamma(t) = (t^2, t^3)$.

Présentons maintenant deux exemples de courbes dans l'espace.

Exemple 1.1.6. *Courbes gauches.*

1. Soit r et c deux réels avec $r > 0$. L'hélice est la courbe paramétrée définie par $\gamma : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^3$ avec $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ct)$.
2. La cubique gauche est la courbe paramétrée définie par $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ avec $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$.

Pour se convaincre que $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ct)$ définit bien une hélice, on remarque que cette courbe décrit dans le plan (Oxy) un mouvement circulaire $t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t))$ alors que sur l'axe (Oz) il s'agit d'un mouvement linéaire $t \mapsto ct$ (croissant si $c > 0$). Les mouvements dans les plans (Oxz) et (Oyz) sont donnés par $t \mapsto (r\cos(t), ct)$ et $(r\sin(t), ct)$ et correspondent à des mouvement sinusoïdaux ($x = r\cos(\frac{z}{c})$ pour le premier et $y = r\sin(\frac{z}{c})$ pour le second). Ces paramétrisations dans les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz) sont les projections de Γ sur ces plans. Ainsi la courbe paramétrée par $t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t), 0)$ est la projection de l'hélice sur le plan (Oxy). Cette projection confirme l'intuition : l'hélice vue « d'en haut » , ou lorsqu'on écrase sa dernière coordonnée, donne un cercle.

Exercice 4

Déterminer les projections sur les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz) de la cubique gauche.

Exercice 5

Tracés de courbes gauches sous Matlab

1. *Reprendre le plan de l'exercice 1, en l'adaptant aux courbes gauches. On fournira une fonction* trace3('nomdef',a,b,pas) *qui produit le tracé dans l'espace du support de la paramétrisation* nomdef*, passé comme une chaîne.*
2. *Proposer une version unique remplaçant* trace2( ) *et* trace3( ) *permettant de traiter courbes planes et gauches.*
3. *Représenter l'hélice et la cubique gauche (voir exemple 1.1.6). Utiliser l'icône* Rotate 3D *pour modifier azimuth et élévation afin d'obtenir les projections sur les plans principaux.*

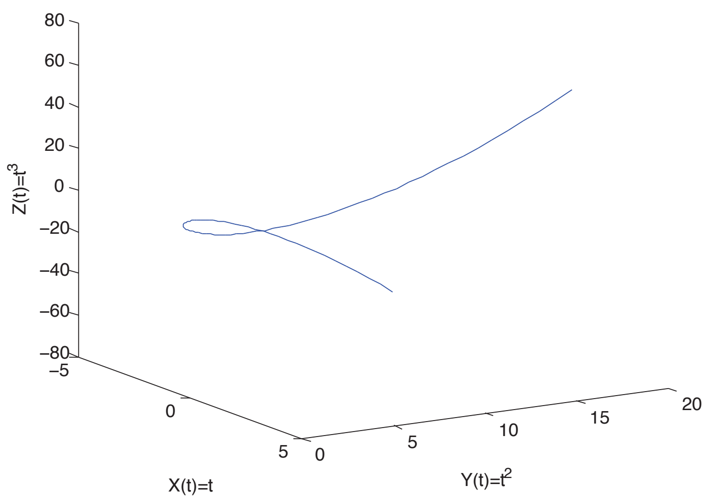

FIGURE 1.2 – Cubique gauche.

Définition 1.1.7. Une courbe paramétrée (I, γ) est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si les composantes de γ sont de classes $\mathcal{C}^k$. En d'autres termes la courbe (I, γ) est de la classe $\mathcal{C}^k$ si la fonction vectorielle γ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Après avoir introduit quelques exemples élémentaires regardons à présent comment l'étude de la fonction vectorielle γ au voisinage d'un point t_0 peut nous aider à décrire le comportement de Γ au voisinage de $M_0 = M(t_0)$ de coordonnées $\gamma(t_0)$.

Étude locale

Définition 1.1.8. Soit (I, γ) une courbe paramétrée de support Γ. Soit $t_0 \in I$, le point de Γ de coordonnées $\gamma(t_0)$ est dit :

- régulier si $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$. Un point non régulier est dit stationnaire.
- simple si pour tout $t \neq t_0$, $\gamma(t_0) \neq \gamma(t)$.
- double s'il existe $t_1 \neq t_0$ tel que $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.
- n-uple s'il existe $t_0, ..., t_{n-1}$, n valeurs distinctes de t telles que $\gamma(t_0) = \cdots = \gamma(t_{n-1})$.

Le résultat suivant sera utile pour l'étude locale des courbes.

Proposition 1.1.9. *Formule de Taylor-Young.*

Soit γ une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, k fois dérivable au voisinage de t_0 de I, alors il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle vérifiant $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t) = \overrightarrow{0}$ telle que :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{t - t_0}{1}\gamma'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!}\gamma''(t_0) + \cdots + \frac{(t - t_0)^k}{k!}\gamma^{(k)}(t_0) + (t - t_0)^k \varepsilon(t).$$

Démonstration. C'est un résultat classique d'analyse [AL77], généralisation aux fonctions vectorielles de la formule de Taylor-Young pour les fonctions d'une variable. La fonction vectorielle γ étant k fois dérivable, on applique Taylor-Young à chaque composante. □

Proposition 1.1.10. *La tangente à la courbe en un point régulier, non double, de paramètre t est dirigée par le vecteur $\gamma'(t)$.*

Démonstration. La tangente à une courbe Γ en un point M_0 de coordonnées $\gamma(t_0)$ est la droite qui « approche » le mieux cette courbe en ce point, c'est-à-dire la meilleure approximation à l'ordre 1 de cette courbe en M_0. Géométriquement cela se traduit en définissant cette tangente, notée $T_{M_0}\Gamma$, comme limite des cordes $(M_0M(t))$ lorsque $t \mapsto t_0$. Un vecteur directeur de $(M_0M(t))$ est

$$v(t) = \frac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{\|\overrightarrow{M_0M(t)}\|}.$$

Pour calculer $\lim\limits_{t\to t_0} v(t)$ on écrit

$$v(t) = \frac{t-t_0}{\|\overrightarrow{M_0M(t)}\|} \times \frac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{t-t_0} = \frac{1}{\frac{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|}{t-t_0}} \times \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}.$$

Le point $\gamma(t_0)$ étant régulier, en passant à la limite on a $\lim\limits_{t\mapsto t_0} v(t) = \dfrac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$. □

D'un point de vue cinématique, $\gamma'(t)$ est le vecteur vitesse pour le déplacement sur Γ du point mobile $M(t)$ de coordonnées $\gamma(t)$. Si Γ est suffisament régulière, i.e. γ suffisament dérivable, on peut imaginer des points où la vitesse est nulle mais où existe pourtant une tangente (par exemple $\gamma(t) = (t^2, t^3)$). Comment déterminer la tangente en un point qui n'est pas régulier ? Comment se positionne la courbe localement en M_0, par rapport à $T_{M_0}\Gamma$?

Pour étudier le comportement local de Γ au voisinage d'un point M_0 de coordonnées $\gamma(t_0)$ nous écrivons le développement de Taylor-Young de γ au voisinage de t_0. Notons p le premier entier tel que $\gamma^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$; si $p = 1$ le point est régulier. Notons q le premier entier supérieur à p tel que $\gamma^{(q)}(t_0)$ est non nul et non colinéaire à $\gamma^{(p)}(t_0)$. Le développement de Taylor-Young à l'ordre q donne :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\gamma^{(p)}(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\gamma^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\varepsilon(t)$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{M_0M}(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!}(1+\phi(t))\gamma^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\gamma^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\varepsilon(t).$$

Le terme $\phi(t)$ correspond à la somme des facteurs mutiplicatifs des termes $\gamma^{(k)}(t_0)$, pour $p+1 \leqslant k \leqslant q-1$, colinéaires à $\gamma^{(p)}(t_0)$ par définition de p et q. Le comportement de Γ au voisinage de M_0 est donc déterminé par $\gamma^{(p)}(t_0)$, porteur de la tangente, et $\gamma^{(q)}(t_0)$ qui permet de déterminer la position par rapport à la tangente. Représentons Γ dans le repère $(M_0, \gamma^p(t_0), \gamma^q(t_0))$. Pour t proche de t_0 on peut considérer $(t-t_0)^q\varepsilon(t)$ comme négligeable et les coordonnées de $M(t)$ dans le repère $(M_0, \gamma^p(t_0), \gamma^q(t_0))$ sont $((t-t_0)^p, (t-t_0)^q)$. En discutant suivant le signe de $t-t_0$ et la parité de p et q on décrit les différents comportements possibles de Γ au voisinage de M_0.