

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Géométrie plane</b>	<b>11</b>
<b>1 Géométrie pure</b>	<b>13</b>
1.1 Parallélisme . . . . .	13
1.1.1 Axiomes d'incidence . . . . .	13
1.1.2 Positions relatives de deux droites . . . . .	14
1.1.3 Propriétés du parallélisme . . . . .	14
1.2 Repérage sur une droite . . . . .	15
1.2.1 Abscisse . . . . .	15
1.2.2 Mesure algébrique . . . . .	16
1.2.3 Distance sur une droite . . . . .	16
1.2.4 Distance dans le plan . . . . .	17
1.3 Projections parallèles . . . . .	18
1.3.1 Axiome de projection . . . . .	18
1.3.2 Applications au triangle (Thalès faible) . . . . .	18
1.3.3 Applications au parallélogramme . . . . .	19
1.3.4 Médiannes d'un triangle . . . . .	20
1.4 Orthogonalité . . . . .	21
1.4.1 Axiomes . . . . .	21
1.4.2 Orthogonalité et parallélisme . . . . .	21
1.4.3 Application au rectangle . . . . .	22
1.4.4 Hauteurs d'un triangle . . . . .	23
1.5 Réflexions . . . . .	23
1.5.1 Définition . . . . .	23
1.5.2 Propriétés . . . . .	23

1.5.3	Distance d'un point à une droite . . . . .	24
1.5.4	Images des figures usuelles par réflexion . . . . .	25
1.6	Médiatrice . . . . .	25
1.6.1	Application au triangle isocèle . . . . .	26
1.6.2	Utilisations de la médiatrice . . . . .	26
1.7	Symétries centrales . . . . .	28
1.8	Les parallélogrammes . . . . .	30
1.9	Théorème de Thalès . . . . .	32
1.9.1	Théorème direct . . . . .	32
1.9.2	Réciproque . . . . .	33
1.9.3	Applications au triangle . . . . .	33
1.10	Théorème de Pythagore . . . . .	34
1.10.1	Rapport de projection orthogonale . . . . .	34
1.10.2	Théorème de Pythagore (sens direct) . . . . .	35
1.10.3	Réciproque . . . . .	36
1.10.4	Autres relations métriques . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Géométrie vectorielle</b>	<b>39</b>
2.1	Vecteurs - Translations . . . . .	39
2.1.1	Vecteurs . . . . .	39
2.1.2	Propriétés . . . . .	40
2.1.3	Translations . . . . .	40
2.1.4	Addition des vecteurs . . . . .	41
2.2	Produit d'un vecteur par un réel . . . . .	42
2.2.1	Colinéarité . . . . .	43
2.2.2	Norme d'un vecteur . . . . .	43
2.2.3	Milieu . . . . .	43
2.2.4	Exercice . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Géométrie analytique</b>	<b>45</b>
3.1	Repérage dans le plan . . . . .	45
3.1.1	Coordonnées d'un point . . . . .	45
3.1.2	Coordonnées d'un vecteur . . . . .	46
3.2	Equations d'une droite . . . . .	47
3.2.1	Equations paramétriques . . . . .	47
3.2.2	Equations cartésiennes . . . . .	48
3.2.3	Equation réduite . . . . .	48
3.3	Calculs de distances - Orthogonalité . . . . .	49

3.4	Exercice . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Trigonométrie</b>	<b>51</b>
4.1	Angles géométriques, mesures . . . . .	51
4.1.1	Angle de deux 1/2-droites . . . . .	51
4.1.2	Bissectrice d'un secteur angulaire . . . . .	52
4.1.3	Applications . . . . .	53
4.1.4	Mesure en radian d'un angle géométrique . . . . .	57
4.2	Trigonométrie . . . . .	59
4.2.1	Cosinus . . . . .	59
4.2.2	Sinus . . . . .	60
4.2.3	Tangente . . . . .	61
4.2.4	Cotangente . . . . .	62
4.2.5	Relations métriques et trigonométriques . . . . .	63
4.2.6	Exercice . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Homothéties - Translations</b>	<b>65</b>
5.1	Définitions . . . . .	65
5.2	Propriétés . . . . .	65
5.3	Groupe des homothéties - Translations . . . . .	67
5.4	Exemples d'applications . . . . .	68
5.4.1	Concurrence des hauteurs, droite d'Euler . . . . .	68
5.4.2	Exercice . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Isométries - Angles orientés</b>	<b>69</b>
6.1	Composées de réflexions . . . . .	69
6.2	Réduction des isométries . . . . .	70
6.2.1	Rotations . . . . .	71
6.2.2	Composée de 3 réflexions d'axes non concourants . . . . .	71
6.3	Déplacements . . . . .	73
6.4	Angles orientés . . . . .	75
6.4.1	Définition . . . . .	75
6.4.2	Angles et isométries . . . . .	75
6.4.3	Groupe des angles orientés . . . . .	76
6.4.4	Mesures des angles orientés . . . . .	77
6.4.5	Angles orientés de vecteurs, de droites . . . . .	79
6.4.6	Applications . . . . .	80
6.5	Caractère affine des isométries . . . . .	81
6.6	Expressions analytiques des isométries . . . . .	82

6.7	Exercice . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Similitudes planes</b>	<b>87</b>
7.1	Définition . . . . .	87
7.2	Rapport d'une similitude . . . . .	87
7.3	Caractère affine des similitudes . . . . .	88
7.4	Réduction des similitudes . . . . .	88
7.4.1	Centre d'une similitude . . . . .	88
7.4.2	Décomposition canonique d'une similitude . . . . .	89
7.5	Détermination d'une similitude . . . . .	90
7.5.1	Par deux points et leurs images . . . . .	90
7.5.2	Comment trouver le centre d'une similitude directe . . . . .	90
7.6	Ecriture complexe d'une similitude . . . . .	91
7.7	Exercices d'applications . . . . .	91
7.7.1	Point de Miquel . . . . .	91
7.7.2	Théorème de Napoléon . . . . .	92
<b>8</b>	<b>Homographies</b>	<b>93</b>
8.1	Définition . . . . .	94
8.2	Groupe circulaire . . . . .	94
8.3	Propriétés géométriques . . . . .	95
8.3.1	Projection stéréographique . . . . .	95
8.3.2	Cercles généralisés . . . . .	96
8.3.3	Action sur les cercles généralisés . . . . .	97
8.3.4	Conservation des angles . . . . .	99
8.3.5	Exemple . . . . .	100
<b>9</b>	<b>Coniques</b>	<b>103</b>
9.1	Définition monofocale . . . . .	103
9.2	Equations réduites . . . . .	105
9.2.1	Parabole . . . . .	105
9.2.2	Exercice . . . . .	105
9.2.3	Ellipse . . . . .	106
9.2.4	Exercice (affinité) . . . . .	107
9.2.5	Hyperbole . . . . .	108
9.2.6	Exercices . . . . .	110
9.3	Définition bifocale des coniques à centre . . . . .	111
9.3.1	Ellipses . . . . .	111
9.3.2	Hyperboles . . . . .	112

9.4	Tangentes aux coniques . . . . .	113
9.4.1	Paraboles . . . . .	113
9.4.2	Ellipses . . . . .	113
9.4.3	Hyperboles . . . . .	115
9.4.4	Exercice (hyperbole équilatère) . . . . .	116
<b>II</b>	<b>Géométrie dans l'espace</b>	<b>117</b>
<b>10</b>	<b>Géométrie affine euclidienne</b>	<b>119</b>
10.1	Espaces affines . . . . .	120
10.1.1	Définition . . . . .	120
10.1.2	Premières propriétés . . . . .	120
10.1.3	Sous-espaces affines . . . . .	121
10.1.4	Repères affines . . . . .	124
10.1.5	Exercice . . . . .	126
10.1.6	Relations avec les barycentres . . . . .	127
10.2	Applications affines . . . . .	128
10.2.1	Définition . . . . .	128
10.2.2	Exemples . . . . .	128
10.2.3	Groupe affine . . . . .	129
10.2.4	Image d'un sous-espace affine . . . . .	131
10.2.5	Applications affines et barycentres . . . . .	131
10.2.6	Expression analytique . . . . .	132
10.3	Espaces affines euclidiens . . . . .	132
10.3.1	Définition . . . . .	132
10.3.2	Distance euclidienne . . . . .	132
10.3.3	Orthogonalité . . . . .	133
10.3.4	Liens entre distance et orthogonalité . . . . .	134
10.4	Isométries ponctuelles . . . . .	135
10.4.1	Définition . . . . .	135
10.4.2	Direction d'une isométrie . . . . .	135
10.4.3	Exemple fondamental : les réflexions . . . . .	136
10.4.4	Cas $\dim(\mathcal{E}) = 1$ . . . . .	136
10.4.5	Cas $\dim(\mathcal{E}) = 2$ . . . . .	136
10.4.6	Cas $\dim(\mathcal{E}) = 3$ . . . . .	138
10.4.7	Exercices . . . . .	141

<b>11 Surfaces usuelles</b>	<b>145</b>
11.1 Rappels sur les courbes paramétrées . . . . .	147
11.2 Les sphères . . . . .	149
11.2.1 Définition . . . . .	149
11.2.2 Equations d'une sphère . . . . .	149
11.2.3 Courbes tracées sur les sphères . . . . .	149
11.2.4 Plans tangents à la sphère . . . . .	151
11.3 Les cylindres . . . . .	152
11.3.1 Définition . . . . .	152
11.3.2 Equations d'un cylindre . . . . .	152
11.3.3 Courbes tracées sur les cylindres . . . . .	153
11.3.4 Plans tangents au cylindre . . . . .	154
11.4 Les cônes . . . . .	156
11.4.1 Définition . . . . .	156
11.4.2 Equations d'un cône . . . . .	156
11.4.3 Courbes tracées sur les cônes . . . . .	157
11.4.4 Plans tangents au cône . . . . .	158
11.5 Surfaces de révolution . . . . .	160
11.6 Equation cartésienne, vecteur normal . . . . .	161
11.7 Surfaces compactes . . . . .	162
11.8 Solides de Platon . . . . .	164
<b>A Preuves et exercices</b>	<b>169</b>
A.1 Géométrie plane . . . . .	169
A.1.1 Chapitre 1 . . . . .	169
A.1.2 Chapitre 2 . . . . .	173
A.1.3 Chapitre 3 . . . . .	176
A.1.4 Chapitre 4 . . . . .	176
A.1.5 Chapitre 5 . . . . .	178
A.1.6 Chapitre 6 . . . . .	179
A.1.7 Chapitre 7 . . . . .	184
A.1.8 Chapitre 8 . . . . .	185
A.1.9 Chapitre 9 . . . . .	186
A.2 Géométrie dans l'espace . . . . .	189
A.2.1 Chapitre 10 . . . . .	189
A.2.2 Annexe D . . . . .	194

<b>B</b>	<b>Rappels sur les barycentres</b>	<b>195</b>
B.1	Systèmes pondérés . . . . .	195
B.2	Fonction de Leibniz - Barycentre . . . . .	195
B.3	Propriétés du barycentre . . . . .	196
B.4	Formule de la moyenne . . . . .	196
B.5	Relations avec la géométrie affine . . . . .	197
<b>C</b>	<b>Rappels d'algèbre linéaire</b>	<b>199</b>
C.1	Espaces vectoriels réels . . . . .	199
C.1.1	Définition . . . . .	199
C.1.2	Sous-espaces vectoriels . . . . .	199
C.1.3	Intersection . . . . .	200
C.1.4	Somme . . . . .	200
C.2	Partie libre, génératrice, base . . . . .	200
C.2.1	Combinaisons linéaires . . . . .	200
C.2.2	Partie génératrice . . . . .	201
C.2.3	Partie libre . . . . .	201
C.2.4	Base . . . . .	201
C.2.5	Coordonnées . . . . .	201
C.3	Dimension . . . . .	202
C.3.1	Définition . . . . .	202
C.3.2	Dimension d'un s.e.v . . . . .	202
C.3.3	S.e.v supplémentaires . . . . .	203
C.3.4	Formule de la dimension . . . . .	203
C.4	Applications linéaires . . . . .	203
C.4.1	Définitions . . . . .	203
C.4.2	Exemples . . . . .	204
C.4.3	Matrice d'une application linéaire . . . . .	204
C.4.4	Image et noyau . . . . .	205
C.4.5	Opérations sur les applications linéaires . . . . .	205
C.4.6	Groupe linéaire . . . . .	206
C.4.7	Inversibilité en dimension finie . . . . .	208
<b>D</b>	<b>Rappels de géométrie euclidienne</b>	<b>209</b>
D.1	Produit scalaire . . . . .	209
D.2	Norme euclidienne . . . . .	210
D.3	Écriture matricielle . . . . .	211
D.4	Orthogonalité . . . . .	212

D.4.1	Définition . . . . .	212
D.4.2	Théorème de Pythagore . . . . .	212
D.4.3	S.e.v orthogonaux . . . . .	213
D.4.4	Procédé d'orthonormalisation de Schmidt . . . . .	214
D.4.5	Projection orthogonale . . . . .	215
D.5	Endomorphismes orthogonaux . . . . .	215
D.5.1	Définition . . . . .	215
D.5.2	Définitions équivalentes . . . . .	215
D.5.3	Matrices orthogonales . . . . .	216
D.5.4	Cas $\dim(E) = 2$ . . . . .	217
D.5.5	Cas $\dim(E) = 3$ . . . . .	219
D.5.6	Exercices . . . . .	223
<b>E</b>	<b>Rappels sur le produit vectoriel</b>	<b>225</b>
E.1	Théorème de Riesz . . . . .	225
E.2	Produit vectoriel . . . . .	226