CHAPITRE I

Quelques expériences fictives

Ce chapitre permet de montrer comment à partir d'observations simples, on peut rapidement faire du calcul relativiste et même aboutir à la célèbre formule $E = mc^2$. Son but est uniquement culturel et ne servira pas dans la suite du texte. Le lecteur pressé peut donc commencer la lecture directement au chapitre suivant.

La théorie de la relativité est née d'une observation qui va à l'encontre de toutes nos intuitions : la vitesse de la lumière est la même par rapport à n'importe quel observateur. C'est un fait observé en 1887 par Michelson et Morley. Imaginons par exemple qu'un photon passe devant un observateur à c km/h. Imaginons qu'un deuxième observateur aille exactement dans la même direction que le photon mais à $(c-1)$ km/h. Pour le sens commun, si ce deuxième observateur mesure la vitesse du photon, il doit trouver 1 km/h. Or, expérimentalement, il est vérifié que cet observateur trouve une vitesse de c km/h. En particulier, les lois habituelles d'addition des vitesses en mécanique classique ne peuvent être vraies, d'où la nécessité de trouver un modèle de l'espace-temps qui prenne en compte ce phénomène tout en gardant « approximativement » (c'est-à-dire pour tout ce qui se passe à l'échelle humaine) les lois de la mécanique classique.

Dans ce premier chapitre, on explique comment, avant même de chercher un bon modèle, on peut déduire de cette observation plusieurs conclusions intéressantes grâce à des raisonnements simples.

1. Temps et longueurs

Prenons un observateur A qui se trouve dans un train qui avance à v mètres/seconde par rapport au quai et dont les wagons ont une longueur de l mètres. Prenons aussi un observateur B qui regarde passer le train depuis le quai. Maintenant, supposons qu'un photon parte de l'arrière du wagon et qu'il parcoure ce wagon en un temps de t secondes. Pour l'observateur A, le photon a parcouru l mètres en t secondes soit une vitesse de l/t mètres/seconde. Maintenant, pour B le photon a parcouru en t secondes l mètres plus la distance parcourue par le train en t secondes soit $d = l + vt$. Ainsi pour l'observateur B, le photon va à $(l + vt)/t = l/t + v$ mètres/seconde. Puisqu'on trouve des vitesses différentes pour les deux observateurs alors que l'expérience dit au contraire qu'on doit trouver les mêmes, c'est qu'il y a une erreur dans le raisonnement. En fait, on a considéré que

(1) les temps mesurés par A et B pour que le photon parcoure le wagon étaient les mêmes (égaux à t).

(2) Les longueurs du wagon mesurées par A et B étaient les mêmes.

Pour arriver à un modèle fidèle à la réalité, il faut donc remettre en cause ces deux principes. Bien sûr, ces différences ne se feront sentir qu'à des vitesses élevées. Un observateur humain qui observe ce qui se passe autour de lui ne se rendra pas compte de ces différences de mesure.

Donc, pour la suite, on supposera que le temps entre deux événements ou la longueur d'un objet dépend de l'observateur qui le mesure. Se pose aussi le problème de la simultanéité entre deux événements qui dépendra elle aussi de l'observateur.

Grandeurs conservées quel que soit l'observateur. Comme on l'a expliqué, on doit remettre en cause les notions de temps et de longueur mais on ne doit pas le faire n'importe comment. À titre d'exemple, une longueur mesurée perpendiculairement au déplacement ne doit pas dépendre de l'observateur. En effet, supposons par exemple que ces longueurs se contractent quand la vitesse augmente (un raisonnement analogue se fait si l'on suppose que les distances s'allongent) et reprenons le cas du train sur lequel se trouve l'observateur A alors que l'observateur B est resté sur le quai.

– Plaçons-nous d'abord du point de vue de l'observateur A. Pour lui le train est immobile alors que les rails ont une vitesse v non nulle. Donc la largeur des rails doit être plus petite que l'écartement des roues du train. Autrement dit, les roues du train laissent des traces à l'extérieur des rails.
– Pour l'observateur B, c'est le train qui avance et donc l'écartement de ses roues doit être plus petit que l'écartement des rails : les traces des roues du train doivent être à l'intérieur des rails.

Comme les traces laissées par le train ne peuvent pas être à la fois à l'extérieur et à l'intérieur des rails, c'est que l'écartement des rails (ou des roues du train) doit être le même pour les deux observateurs A et B.

À première vue, il semble facile d'imaginer une expérience qui montre qu'une distance mesurée dans le sens du déplacement ne doit pas dépendre de l'observateur A ou B (on se replace dans les conditions de l'expérience du train). Par exemple, on a envie de dire que si l'observateur A du train tient sa règle dans le sens du déplacement et que l'observateur B du quai colle (puis retire rapidement) sa règle sur celle du train lorsqu'elle passe devant lui de sorte que les deux extrémités de la règle B laissent des traces sur la règle A, on pourra après l'expérience, comparer la distance entre les traces et la longueur de la règle. Comme, inversement, l'observateur A peut coller sa règle sur celle du quai lorqu'elle lui passe devant, il semble qu'il y ait une contradiction si l'on ne trouve pas, après l'expérience, la distance entre les traces égale à la longueur commune des règles. En fait, dans la description de cette expérience, on a fait l'erreur de considérer que deux événements simultanés (et pas au même endroit) pour un observateur étaient simultanés pour l'autre car lorsque l'on dit que l'observateur B « colle » sa règle sur la règle A, on veut dire que simultanément pour B, les deux extrémités sont collées sur la règle A. Mais l'observateur A, pour cette même expérience, ne va pas voir les deux extrémités de la règle B se coller simultanément sur la sienne, mais l'une après l'autre. Nous allons voir dans la suite de ce chapitre que si c'est l'observateur B qui colle sa règle sur celle de A, les traces regardées après l'expérience seront à distance strictement plus grande que la longueur de la règle A. De même, si c'est l'observateur A qui colle sa règle sur celle de B, les traces seront aussi à distance strictement plus grande que la longueur de la règle B (identique à la règle A). Dans le premier cas, l'observateur A voit les extrémités de la règle B se coller l'une après l'autre et dans le deuxième cas, c'est l'observateur B qui voit les extrémités de la règle A se coller l'une après l'autre. Ces deux cas sont nécessairement des expériences distinctes et il n'y a finalement pas de contradiction à ce que, lorsque l'observateur B mesure la longueur de la règle A qui se déplace, il la trouve plus courte que la sienne et que si c'est l'observateur A qui mesure la règle B qui se déplace, il trouve aussi la longueur plus courte que la sienne.

Temps et distance pour deux observateurs. On va maintenant imaginer deux expériences qui permettent de préciser les différences de mesure de temps et de distance dans le sens du déplacement pour deux observateurs.

(1) Reprenons toujours nos deux observateurs A (dans le train) et B (sur le quai). Notons v la vitesse du train par rapport au

quai. Imaginons qu'un photon fasse un aller-retour (plancher du wagon)-(plafond du wagon). Notons h la hauteur du plafond par rapport au plancher du train (h est la même pour A et B puisque c'est une distance qui est mesurée perpendiculairement au déplacement).

- A mesure le temps t_A pour cet aller-retour du photon. Pour lui le photon a parcouru la distance de $2h$. Donc la vitesse du photon est $c_1 = \frac{2h}{t_A}$.
- B mesure le temps t_B pour le même trajet. Mais de son point de vue, le photon n'a pas un parcours vertical puisque le train avance. Plus précisement en hauteur il a parcouru $2h$ et horizontalement vt_B. D'après Pythagore, il a parcouru $\sqrt{4h^2 + v^2t_B^2}$ ce qui donne pour le photon une vitesse $c_2 = \frac{\sqrt{4h^2+v^2t_B^2}}{t_B}$.

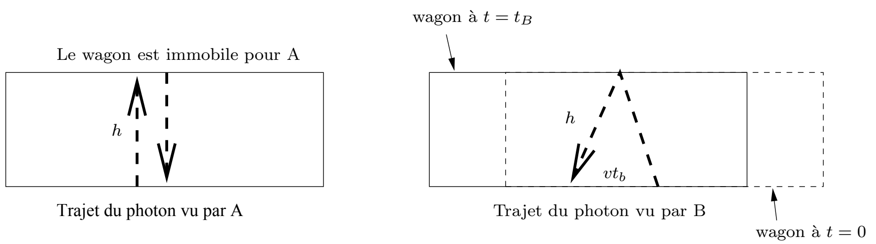

FIGURE 1. Calcul du temps mesuré par deux observateurs

Maintenant, comme la vitesse de la lumière est constante par rapport à n'importe quel observateur, on a $c_1 = c_2 = c$ et on trouve que

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{2h}{c} \\ &= \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + v^2t_B^2}} t_B \\ &= \sqrt{1 - \frac{v^2t_B^2}{v^2t_B^2 + 4h^2}}\, t_B. \end{aligned}$$

Comme $c = \frac{\sqrt{4h^2+v^2t_B^2}}{t_B}$, il en découle

$$t_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t_B.$$

On admet donc la règle suivante :

Règle 1 : *Soient deux observateurs A et B qui se déplacent à vitesse constante v l'un par rapport à l'autre. On considère deux événements qui se passent* **au même endroit** *pour A. Alors, si l'on note respectivement t_A et t_B les temps mesurés entre ces deux événements par A et B, on a $t_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t_B$.*

REMARQUE I.1. Il est très important de noter que ces événements doivent se passer au même endroit pour l'un des observateurs, d'où la nécessité de considérer un aller-retour du photon. Sans cela, la règle dirait aussi que $t_B = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t_A$, ce qui est faux bien sûr. Le point 1 de la remarque I.2 ci-dessous illustre aussi la nécessité de considérer de tels événements.

Avec le même raisonnement, on peut aussi en déduire une règle avec des hypothèses un peu plus générales, qui nous serviront pour la suite :

Règle 1' : *Soient deux observateurs A et B qui se déplacent à vitesse constante v l'un par rapport à l'autre. On considère deux événements qui se passent à deux endroits X et Y avec (XY) perpendiculaire au mouvement pour A (***attention, cette notion dépend de l'observateur***). Alors si l'on note respectivement t_A et t_B les temps mesurés entre ces deux événements par A et B, on a $t_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t_B$.*

(2) Maintenant, considérons que le photon fait un aller-retour (arrière du wagon)-(avant du wagon). Cette fois, la longueur dépend de l'observateur. Notons l_A (resp. l_B) la longueur du wagon mesurée par A (resp. par B) et conservons v pour sa vitesse.
   - L'observateur A mesure un temps t_A pour cet aller-retour. La distance parcourue par le photon pendant ce temps est $2l_A$. Donc sa vitesse est $c = \frac{2l_A}{t_A}$.
   - Pour B, séparons le trajet aller du trajet retour. Notons t'_B (resp. t''_B) le temps mesuré par B pour l'aller (resp. le retour). Pour B, la distance parcourue par le photon sur l'aller est $l_B + vt'_B$ (longueur du wagon plus distance

parcourue par le wagon pendant le trajet aller). Pour le retour, la distance mesurée par B est $l_B - vt''_B$.

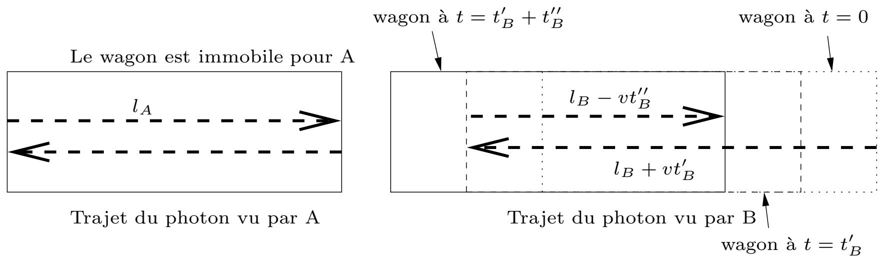

FIGURE 2. Calcul des longueurs dans le sens du mouvement mesurées par deux observateurs

On a
$$c = \frac{l_B + vt'_B}{t_{B'}} = \frac{l_B - vt''_B}{t_{B''}}.$$
De cette équation, on tire $t'_B = \frac{l_B + vt'_B}{c}$ c'est-à-dire $t'_B = \frac{l_B}{c-v}$. De même, $t''_B = \frac{l_B}{c+v}$. D'après la Règle 1 ci-dessus, on a
$$\begin{aligned} t_A &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}(t'_B + t''_B) \\ &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right) l_B \\ &= \frac{2}{\sqrt{c^2 - v^2}}\, l_B. \end{aligned}$$
Ainsi,
$$l_A = \frac{c\,t_A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, l_B.$$
On en déduit la règle suivante :

Règle 2 : Soient deux observateurs A et B qui se déplacent l'un par rapport à l'autre à vitesse constante et soit $[PQ]$ un segment **fixe pour** *A et parallèle au mouvement. Alors, les distances l_A et l_B entre P et Q mesurées respectivement par A et B sont liées par $l_A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, l_B$.*

REMARQUE I.2. (1) Encore une fois, pour appliquer la règle qui lie les temps mesurés par deux observateurs, il faut bien vérifier que ces événements se passent au même endroit pour l'un des observateurs. En effet, dans cette expérience, les temps des trajets aller et retour mesurés par A sont tous les deux de $t_A/2$. En appliquant la règle de comparaison de temps, on a envie de dire que $t_A/2 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t'_B$ et $t_A/2 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t''_B$. Cela conduit à $t'_B = t''_B$, ce qui est faux (sinon, la vitesse du photon mesurée par B n'est pas la même sur l'aller et le retour). De même, dans la règle de comparaison des longueurs, il est important que le segment $[PQ]$ mesuré soit fixe par rapport à l'un des observateurs.

(2) De ces raisonnements, on peut facilement déduire des règles de comparaison de temps lorsque deux événements ne se passent pas au même endroit ou de comparaison de longueurs pour un segment quelconque. Ces règles sont appelées *transformations de Lorentz*.

2. Masse et impulsion

En mécanique classique, considérons un objet q de masse m animé dans un repère (c'est-à-dire pour un observateur galiléen donné) d'une vitesse $\overrightarrow{v}$.

DÉFINITION. Le vecteur $\overrightarrow{p} := m\overrightarrow{v}$ est appelé *quantité de mouvement* ou *impulsion* de l'objet q.

Soit maintenant un système composé de n objets $q_1, \cdots, q_n$ de quantités de mouvement respectives $\overrightarrow{p_1}, \cdots, \overrightarrow{p_n}$. Par système, nous entendons que les objets considérés n'ont aucune interaction avec l'extérieur. Une loi fondamentale de la dynamique en mécanique classique est la suivante :

Loi de conservation de quantité de mouvement : *la quantité de mouvement du système défini par $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_1} + \cdots + \overrightarrow{p_n}$ est constante avec le temps. En particulier, elle est conservée lors des chocs entre les objets du système.*

On va supposer que cette loi, basée sur l'expérience, est toujours valide en relativité mais pour cela, il va falloir préciser les choses, puisque les notions de temps et de distance sont remises en cause. Dans ce but, nous reprenons nos deux observateurs A (dans le train) et B (sur le quai). Chacun va lancer une pierre (q_A pour A et q_B pour B) de masse m perpendiculairement au mouvement et avec une vitesse V de manière à ce que les deux pierres se rencontrent. Pour l'observateur B on travaille dans un repère (Bxy) où l'axe (Bx) est parallèle aux rails et (By) est orthogonal aux rails. Pour l'observateur A, on travaille dans le repère (Axy) dont seule l'origine est différente : on prend A à la place de B. Autrement dit, le repère (Axy) se déplace à la vitesse constante v par rapport au repère (Bxy).

Avant le choc,

– l'observateur A voit la pierre q_A animée de la vitesse (exprimée dans (Axy))

$$\overrightarrow{v}_A^A = \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}$$

tandis que l'observateur B voit la même pierre animée de la vitesse (exprimée dans (Bxy))

$$\overrightarrow{v}_A^B = \begin{pmatrix} v \\ V' \end{pmatrix}$$

où v est la vitesse du train et V' est à calculer.

– Par symétrie de la situation, l'observateur A voit la pierre q_B animée de la vitesse

$$\overrightarrow{v}_B^A = \begin{pmatrix} -v \\ -V' \end{pmatrix}$$

tandis que l'observateur B voit la même pierre animée de la vitesse

$$\overrightarrow{v}_B^B = \begin{pmatrix} 0 \\ -V \end{pmatrix}$$

(on a bien sûr arbitrairement choisi une orientation des axes).

Calcul de V' : V' est la composante perpendiculaire au train du vecteur vitesse de la pierre q_A vue par B. Regardons le temps que met la pierre q_A pour parcourir une distance l sur l'axe perpendiculaire aux rails (l'axe de y. On oublie les composantes dans l'autre direction). D'après le paragraphe précédent, cette distance ne dépend pas de l'observateur. Notons t_A (resp. t_B) le temps mesuré par A (resp. par B) pour que la pierre parcoure cette distance l. D'après la Règle 1' du paragraphe précédent, on a $t_A = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, t_B$. D'autre part, on a $V = \frac{l}{t_A}$ et $V' = \frac{l}{t_B}$. On obtient ainsi que

$$V' = V\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{I.1}$$