Centrale/Supélec Autour des matrices de Toeplitz
Année 2018
Épreuve 1

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$, $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble $\{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$· $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $(t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$, on note
$T(t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1})$ la matrice

$$T(t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice est appelée matrice de Toeplitz d'ordre n. On nomme $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$:
$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) = \big\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \;\big|\; \exists (t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1},$
$M = T(t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1})\big\}$·

Une matrice N de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $N^p = 0$. On admettra qu'une telle matrice vérifie $N^n = 0$.
Pour toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.
Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ $(p \in \mathbb{N})$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $P(M)$ désigne la matrice $P(M) = a_0 I_n + a_1 M + \cdots_p M^p$.

Le but de ce problème est l'étude de certaines propriétés des matrices de Toeplitz. La partie I traite de généralités sur les matrices de Toeplitz et de quelques exemples. La partie II, indépendante de la partie I, étudie un type particulier de matrices de Toeplitz — les matrices circulantes — en s'intéressant à leur structure et à leur diagonalisabilité. Enfin, la partie III, indépendante des précédentes, aborde l'étude des matrices cycliques et les relie aux matrices de Toeplitz.

I Généralités et quelques exemples

I.A – Généralités

Q1. Montrer que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. En donner une base et en préciser la dimension.

Q2. Montrer que si deux matrices A et B commutent ($AB = BA$) et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, alors $P(A)$ et $Q(B)$ commutent.

I.B – Cas de la dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz de taille 2×2, où (a, b, c) sont des complexes.

Q3. Donner le polynôme caractéristique de A.

Q4. Discuter, en fonction des valeurs de (a, b, c), de la diagonalisabilité de A.

Réduction d'une matrice sous forme de Toeplitz

Q5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.

Q6. En déduire que toute matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

I.C – Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de la forme $T(0, \ldots, 0, t_{-1}, t_0, t_1, 0, \ldots, 0)$, *i.e.* une matrice de la forme

$$A_n(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0 & & c & a \end{pmatrix} \quad \text{où } (a,b,c) \text{ sont des complexes.}$$

On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a, b, c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Q7. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0,\ x_{n+1} = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$.

Q8. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation

$$bx^2 + (a-\lambda)x + c = 0 \tag{I.1}$$

Q9. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que (I.1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.

Q10. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que r_1/r_2 appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.

Q11. En utilisant l'équation (I.1) satisfaite par r_1 et r_2, déterminer r_1r_2 et r_1+r_2. En déduire qu'il existe un entier $\ell \in [\![1,n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que $\lambda = a + 2\rho\cos\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right)$.

Q12. En déduire qu'il existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $[\![0,n+1]\!]$, $x_k = 2i\alpha\,\dfrac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.

Q13. Conclure que $A_n(a,b,c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

II Matrices circulantes

Une matrice circulante est une matrice de Toeplitz $T(t_{-n+1},\dots,t_0,\dots,t_{n-2},t_{n-1})$, pour laquelle $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $t_k = t_{-n+k}$. Elle est donc de la forme

$$T(t_1,t_2,\dots,t_0,t_1,\dots,t_{n-2},t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & t_{n-2} \\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}.$$

On pose $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Q14. Calculer $M_n^2,\dots,M_n^n$. Montrer que M_n est inversible et donner un polynôme annulateur de M_n.

Q15. Justifier que M_n est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres (exprimées à l'aide de ω_n) et donner une base de vecteurs propres de M_n.

Q16. On pose $\Phi_n = \left(\omega_n^{(p-1)(q-1)}\right)_{1\leqslant p,q\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que Φ_n est inversible et donner sans calcul la valeur de la matrice $\Phi_n^{-1}M_n\Phi_n$.

Q17. Soit A une matrice circulante. Donner un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$.

Q18. Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer, à l'aide d'une division euclidienne de P par un polynôme bien choisi, que $P(M_n)$ est une matrice circulante.

Q19. Montrer que l'ensemble des matrices circulantes est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$, stable par produit et par transposition.

Q20. Montrer que toute matrice circulante est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

III Étude des matrices cycliques

III.A – Endomorphismes et matrices cycliques

Pour toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.

Q21. Montrer que si M est dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe x_0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\left(x_0, f_M(x_0), \ldots, f_M^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$;

(ii) M est semblable à la matrice $C(a_0, \ldots, a_{n-1})$ définie par

$$C(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

où $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ sont des nombres complexes.

On dit alors que f_M est un endomorphisme cyclique, que M est une matrice cyclique et que x_0 est un vecteur cyclique de f_M.

III.A.1) Soit M dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que f_M est diagonalisable. On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs associée à ces valeurs propres. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$ où $(u_1, \ldots, u_n)$ sont n nombres complexes.

Q22. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u_1, \ldots, u_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ pour que $\left(u, f_M(u), \ldots, f_M^{n-1}(u)\right)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

Q23. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Caractériser alors ses vecteurs cycliques.

III.A.2) Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On s'intéresse aux éléments propres de la matrice $C(a_0, \dots, a_{n-1})$.

Q24. Soit λ un nombre complexe. En discutant dans $\mathbb{C}^n$ du système $C(a_0, \dots, a_{n-1})X = \lambda X$, montrer que λ est une valeur propre de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ si et seulement si λ est racine d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ à préciser.

Q25. Si λ est racine de ce polynôme, déterminer le sous-espace propre de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ associé à la valeur propre λ et préciser sa dimension.

Q26. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice cyclique soit diagonalisable.

III.A.3) Commutant d'un endomorphisme cyclique

Soient M une matrice cyclique et x_0 un vecteur cyclique de f_M. On cherche à montrer que l'ensemble
$$\mathcal{C}(f_M) = \left\{ g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \;\middle|\; f_M \circ g = g \circ f_M \right\}$$
est l'ensemble des polynômes en f_M.

Q27. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(f_M) \in \mathcal{C}(f_M)$.

Q28. Soit $g \in \mathcal{C}(f_M)$. Montrer qu'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n_1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que $g = \alpha_0 Id_{\mathbb{C}^n} + \alpha_1 f_M + \dots + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}$.
On pourra utiliser la base $\left(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0)\right)$ et exprimer $g(x_0)$ dans cette base.

Q29. Conclure.

III.A.4) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q30. Donner les valeurs propres de N et les sous-espaces propres associés. Est-elle diagonalisable ?

Q31. La matrice N est-elle cyclique ?

Q32. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

III.B – Quelques résultats de calcul matriciel dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

Dans toute la suite du problème, les matrices considérées sont à coefficients réels.
Si $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice d'ordre n et k est un entier dans $[\![-n+1, n-1]\!]$, on dit que le coefficient $a_{i,j}$ de A est un coefficient diagonal d'ordre k si $j - i = k$.

On note $A^{(k)} = \left(a_{i,j}^{(k)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } j-i=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Tous les coefficients de cette matrice sont nuls sauf ses coefficients diagonaux d'ordre k qui sont égaux aux coefficients diagonaux d'ordre k de A.

Ainsi, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

On note D_k la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux d'ordre k qui valent 1. Pour tout entier relatif k, on définit l'espace vectoriel Δ_k par
$\Delta_k = \left\{M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = 0 \text{ si } j-i \neq k\right\}$ si $k \in [\![-n+1, n-1]\!]$ et $\Delta_k = \{0\}$ sinon. Ainsi, Δ_0 est l'ensemble des matrices diagonales, Δ_1 l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement les coefficients diagonaux d'ordre 1, Δ_{-1} l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement les coefficients diagonaux d'ordre -1.

Pour tout k dans $\mathbb{Z}$, on note H_k l'espace vectoriel $\bigoplus_{i=k}^{n-1} \Delta_i$.

Q33. Montrer que si i et j sont dans $[\![-n+1, n-1]\!]$, si $A \in \Delta_i$ et $B \in \Delta_j$, alors $AB \in \Delta_{i+j}$.

Q34. En déduire que si $A \in H_i$ et $B \in H_j$, alors $AB \in H_{i+j}$.

III.B.1)

Q35. Soit C une matrice nilpotente. Montrer que $I_n + C$ est inversible et que $(I_n + C)^{-1} = I_n - C + C^2 + \cdots + (-1)^{n-1}C^{n-1}$.

On suppose que $k \geqslant 0$ et que C est une matrice de Δ_{k+1}. On pose $P = I_n + C$.

Q36. Monter que P est inversible et que $P^{-1} \in \bigoplus_{p=0}^{n-1} \Delta_{p(k+1)}$.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : M \mapsto P^{-1}MP$.

Q37. Soient $i \in [\![0, k]\!]$ et $M \in \Delta_i$. Montrer qu'il existe M' dans H_{k+1} tel que $\varphi(M) = M + M'$.

Q38. La matrice N étant la matrice définie en III.A.4, montrer qu'il existe N' dans H_{k+1} tel que $\varphi(N) = N + NC - CN + N'$.

Q39. Soit T une matrice triangulaire supérieure.
On pose $A = N + T,\ B = \varphi(A)$. Montrer que $B \in H_{-1}$ et que

$$\begin{cases} \forall i \in [\![-1, k-1]\!],\ B^{(i)} = A^{(i)} \\ B^{(k)} = A^{(k)} + NC - CN \end{cases}$$

III.C – L'opérateur de Sylvester

On définit les opérateurs

$$\mathcal{S} : \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & NX - XN \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{S}^\star : \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & {}^tNX - X{}^tN \end{pmatrix}$$

Q40. Montrer que le noyau de $\mathcal{S}$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires inférieures. On admet que le noyau de $\mathcal{S}^\star$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires supérieures.

Q41. Montrer que $\mathcal{S}(\Delta_{k+1}) \subset \Delta_k$ et $\mathcal{S}^\star(\Delta_k) \subset \Delta_{k+1}$.
On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel défini par :

$$\forall (M_1, M_2) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \big(M_1 | M_2\big) = \mathrm{tr}({}^tM_1 M_2).$$

On note $\mathcal{S}_{k+1}$ la restriction de $\mathcal{S}$ à Δ_{k+1} et $\mathcal{S}_k^\star$ la restriction de $\mathcal{S}^\star$ à Δ_k.

Q42. Vérifier que pour tout X dans Δ_{k+1} et tout Y dans Δ_k, on a : $\big(S_{k+1}X | Y\big) = \big(X | S_k^\star Y\big)$. En déduire que $\mathrm{Ker}(\mathcal{S}_k^\star)$ et $\mathrm{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$ sont supplémentaires orthogonaux dans Δ_k, c'est-à-dire que

$$\Delta_k = \mathrm{Ker}(\mathcal{S}_k^\star) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(\mathcal{S}_{k+1}).$$

Q43. Soient T une matrice triangulaire supérieure, $A = N + T$ et $k \geqslant 0$. Montrer que A est semblable à une matrice L dont tous les coefficients diagonaux d'ordre k sont égaux et vérifiant $\forall i \in [\![-1, k-1]\!],\ L^{(i)} = A^{(i)}$.

Q44. En déduire que toute matrice cyclique est semblable à une matrice de Toeplitz.

Solution

Partie I

I.A -

Q1. En utilisant la notation M_n définie au début de la partie II il vient : $T \in \mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $\exists ! (t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$ tel que $T = \sum\limits_{k=1}^{n-1} t_{-k}({}^tM_n)^k + t_0 I_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} t_k M_n^k$ et donc $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de base $\big(({}^tM_n)^{n-1}, \ldots, {}^tM_n, I_n, M_n, \ldots, M_n^{n-1}\big)$, par suite sa dimension est $2n-1$.

Q2. Si $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{q} b_j X^j$, comme $\forall (i,j) \in [\![0,p]\!] \times [\![0,q]\!]$, $A^i B^j = B^j A^i$, on a $P(A)Q(B) = \sum_{i=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{q} a_i b_j A^i B^j\right) = \sum_{j=0}^{q}\left(\sum_{i=0}^{p} b_j a_i B^j A^i\right)$, soit $P(A)Q(B) = Q(B)P(A)$.

I.B -

Q3. Comme $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$, $\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$, soit $\chi_A(X) = X^2 - 2aX + (a^2 - bc)$.

Q4. Le discriminant de $\chi_A(X)$ est $4bc$.
• Si $bc = 0$ alors $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{a\}$ et donc A n'est diagonalisable que si, et seulement si, $A = aI_2$ *i.e.* si, et seulement si, $b = c = 0$;
• sinon $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ est de cardinal 2 donc A est diagonalisable.

Q5. Si $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ est de cardinal 2 alors, en notant α et β les valeurs propres (distinctes) de M, cette matrice est semblable à $\operatorname{Diag}(\alpha,\beta)$.
Sinon, en notant α l'unique valeur propre de M, on choisit un vecteur propre X de M, on complète (X) en (X,Y) base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. Soit P la matrice de (X,Y) dans la base canonique de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ alors $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où $(\beta,\gamma) \in \mathbb{C}^2$ et, par conservation de la trace, $\beta = \alpha$.

Q6. Reprenons la question précédente.
Dans le premier cas posons $a = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $b = 1$ et $c = \dfrac{a^2 - \alpha\beta}{4}\cdot$
La question **Q4** montre que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ est semblable à $\operatorname{Diag}(\alpha,\beta)$ et, donc, à M car $\chi_A(X) = X^2 - 2aX + (a^2 - bc) = (X-\alpha)(X-\beta)$ et $\alpha \neq \beta$.
Dans le deuxième cas M est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ qui est une matrice de Toeplitz.

I.C -

Q7. Pour simplifier on écrira plutôt A_n que $A_n(a,b,c)$.
$A_nX = \lambda X \iff \begin{cases} (a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0 \\ \forall k \in [\![1,n-2]\!],\ cx_k + (a-\lambda)x_{k+1} + bx_{k+2} = 0 \\ cx_{n-1} + (a-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$ ce qui équivaut encore à $\begin{cases} x_0 = x_{n+1} = 0 \\ \forall k \in [\![0,n-1]\!],\ cx_k + (a-\lambda)x_{k+1} + bx_{k+2} = 0 \end{cases}$ d'où le résultat attendu.

Q8. Si (I.1) a deux solutions (distinctes) que l'on note r_1 et r_2 alors $\exists!(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$.
On notera que la condition $x_0 = 0$ impose $\beta = -\alpha$ et, donc,
$\forall k \in \mathbb{N},\ x_k = \alpha(r_1^k - r_2^k)$.