

# Table des matières

<b>1. Fondations</b>	<b>1</b>
<b>A. L'ensemble des entiers naturels</b>	<b>1</b>
I. Définition	1
II. Addition des entiers naturels	2
III. Multiplication des entiers naturels	3
IV. La relation d'ordre (naturelle) sur $\mathbb{N}$	4
V. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$	6
VI. Propriétés des intervalles $\llbracket 0, n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{N}$	6
<b>B. Ensembles finis et infinis</b>	<b>7</b>
I. Définitions et premières propriétés	7
II. Cardinaux des ensembles finis	8
III. Ensembles dénombrables	9
IV. Exercices	10
<b>C. L'ensemble des entiers relatifs</b>	<b>16</b>
I. Définition	16
II. Addition	17
III. Relation d'ordre	17
IV. Multiplication	18
V. Valeur absolue d'un entier relatif	19
VI. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	19
<b>D. L'ensemble des nombres rationnels</b>	<b>31</b>
I. Définition	31
II. Partie entière et partie fractionnaire	33
III. Nombre rationnel $b$ -adique	33
IV. Compléments sur les relations d'ordre	39
V. Suites convergentes dans $\mathbb{Q}$	41
<b>E. Le corps des nombres réels</b>	<b>47</b>
I. Définition et premières propriétés	47
II. Addition dans $\mathbb{R}$	53
III. Multiplication dans $\mathbb{R}_+$	55
IV. Multiplication dans $\mathbb{R}$	58
V. Suites de nombres réels	59
<b>F. Compléments</b>	<b>62</b>
I. Application des entiers naturels	62
II. Application des entiers relatifs	65
III. Théorème fondamental	66
IV. Applications : exponentielles, logarithmes et puissances	75
<b>2. Algèbre générale</b>	<b>79</b>
<b>A. Groupes</b>	<b>79</b>

I. Rappels de cours . . . . .	79
II. Exercices . . . . .	85
III. Solutions des exercices . . . . .	96
<b>B. Anneaux et corps . . . . .</b>	<b>108</b>
I. Rappels de cours . . . . .	108
II. Exercices . . . . .	110
III. Solutions des exercices . . . . .	116
<b>C. Arithmétique . . . . .</b>	<b>124</b>
I. Rappels de cours . . . . .	124
II. Exercices . . . . .	124
III. Solutions des exercices . . . . .	132
<b>D. Nombres complexes . . . . .</b>	<b>145</b>
I. Rappels de cours . . . . .	145
II. Exercices . . . . .	145
III. Solutions des exercices . . . . .	151
<b>E. Polynômes et fractions rationnelles . . . . .</b>	<b>158</b>
I. Rappels de cours . . . . .	158
II. Exercices . . . . .	161
III. Solutions des exercices . . . . .	169
<b>F. Activités . . . . .</b>	<b>185</b>
I. Suites de FAREY . . . . .	185
II. Morphismes du groupe additif des nombres réels . . . . .	188
III. Réseaux de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	189
<b>3. Algèbre linéaire . . . . .</b>	<b>199</b>
<b>A. Espaces vectoriels . . . . .</b>	<b>199</b>
I. Définition . . . . .	199
II. Sous-espaces vectoriels . . . . .	199
III. Applications linéaires . . . . .	200
IV. Familles génératrices, familles libres, bases . . . . .	202
V. En dimension finie . . . . .	202
VI. Matrices et applications linéaires . . . . .	204
VII. Matrices de changement de bases . . . . .	205
VIII. Rang d'une matrice carrée . . . . .	206
IX. Matrices carrées remarquables . . . . .	206
<b>B. Déterminants . . . . .</b>	<b>207</b>
I. Applications $n$ -linéaires (rappels) . . . . .	207
II. Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	207
III. Déterminant d'une matrice (carrée) . . . . .	207
IV. Calcul du déterminant d'une matrice . . . . .	208
V. Applications et compléments . . . . .	209
<b>C. Polynômes d'endomorphisme . . . . .</b>	<b>210</b>
I. Définitions . . . . .	210
II. Polynôme minimal . . . . .	211
III. Théorème de décomposition des noyaux . . . . .	211
<b>D. Réduction . . . . .</b>	<b>212</b>
I. Éléments propres . . . . .	212
II. Endomorphisme diagonalisable . . . . .	215

III. Endomorphisme trigonalisable . . . . .	217
IV. Réduction de JORDAN . . . . .	217
<b>E. Groupe linéaire général . . . . .</b>	<b>229</b>
I. Exemples d'automorphismes de $E$ . . . . .	229
II. Centre de $GL(E)$ et de $SL(E)$ . . . . .	234
III. Générateurs de $GL(E)$ et de $SL(E)$ . . . . .	235
IV. Opération de $GL(E)$ et de $SL(E)$ . . . . .	237
V. Groupe des commutateurs de $GL(E)$ et de $SL(E)$ . . . . .	244
VI. Sous-groupe distingués de $SL(E)$ . . . . .	247
<b>F. Décomposition de BRUHAT . . . . .</b>	<b>249</b>
I. Drapeaux dans un espace vectoriel . . . . .	249
II. Décomposition de BRUHAT de $GL_n(K)$ . . . . .	253
<b>G. Exercices . . . . .</b>	<b>256</b>
<b>H. Solutions des exercices . . . . .</b>	<b>280</b>
<b>4. Algèbre bilinéaire . . . . .</b>	<b>325</b>
<b>A. Formes quadratiques . . . . .</b>	<b>325</b>
I. Propriétés générales . . . . .	325
II. Réduction des formes quadratiques . . . . .	328
<b>B. Espaces préhilbertiens réels . . . . .</b>	<b>331</b>
I. Produit scalaire . . . . .	331
II. Orthogonalité . . . . .	332
III. Projection orthogonale . . . . .	334
<b>C. Espaces euclidiens . . . . .</b>	<b>335</b>
I. Isomorphisme canonique . . . . .	335
II. Adjoint d'un endomorphisme . . . . .	336
III. Automorphismes orthogonaux . . . . .	338
IV. Endomorphismes autoadjoints . . . . .	340
<b>D. Étude de <math>\mathcal{O}(E)</math> . . . . .</b>	<b>341</b>
I. Réduction . . . . .	341
II. Décomposition en produit de réflexions . . . . .	345
III. Sous-groupes finis du groupe orthogonal du plan . . . . .	346
<b>E. Exercices . . . . .</b>	<b>349</b>
<b>F. Solutions des exercices . . . . .</b>	<b>361</b>
<b>G. Activités . . . . .</b>	<b>370</b>
I. Quaternions . . . . .	370
II. Algèbre alternative ; octonions . . . . .	383
III. Similitudes . . . . .	391
IV. Théorème de MUNTZ . . . . .	395
V. Endomorphismes partiellement isométriques . . . . .	403
<b>5. Espaces préhilbertiens complexes . . . . .</b>	<b>411</b>
<b>A. Rappels de cours . . . . .</b>	<b>411</b>
I. Généralités . . . . .	411

II. Endomorphismes normaux . . . . .	412
III. Théorème spectral . . . . .	413
<b>B. Exercices . . . . .</b>	<b>414</b>
<b>C. Solutions des exercices . . . . .</b>	<b>418</b>
<b>6. Géométrie . . . . .</b>	<b>429</b>
<b>A. Espaces affines . . . . .</b>	<b>429</b>
I. Définitions . . . . .	429
II. Barycentres . . . . .	430
III. Sous-espaces affines . . . . .	431
IV. Applications affines . . . . .	433
V. Convexes, enveloppes convexes . . . . .	438
VI. Exemples de parties convexes . . . . .	440
VII. Exercices . . . . .	443
VIII. Activités . . . . .	457
1. Groupe des isométries du polygone régulier . . . . .	457
2. Sous-groupes polyédraux de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	459
3. Un problème . . . . .	469
<b>B. Droites et cercles dans le plan . . . . .</b>	<b>473</b>
I. Notions d'angles . . . . .	473
II. Nombres complexes et géométrie . . . . .	476
III. Droites remarquables du triangle . . . . .	476
IV. Similitudes planes . . . . .	479
V. Cercle (rappels) . . . . .	484
VI. Inversion ; groupe circulaire . . . . .	485
VII. Exercices . . . . .	488
VIII. Activité. Théorème de MORLEY . . . . .	499
<b>C. Coniques . . . . .</b>	<b>502</b>
I. Sections planes d'un cône de révolution . . . . .	502
II. Formes quadratiques et coniques . . . . .	505
III. Coniques du plan affine euclidien . . . . .	511
IV. Exercices . . . . .	516
V. Solutions des exercices . . . . .	519
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>527</b>
<b>Index . . . . .</b>	<b>529</b>

---