

Table des matières

1. Suites et séries	1
I. Suites numériques	1
Exercices	7
II. Séries numériques	8
III. Produits infinis	22
IV. Suites de fonctions	26
V. Séries de fonctions	30
VI. Produits infinis de suites de fonctions	33
Exercices	36
2. Espaces métriques	45
I. Définitions	46
II. Espaces métriques complets	53
A. Définition et exemples	54
B. Propriétés.	56
- Théorème des fermés emboîtés	56
- Théorème des parties enchainées.	56
- Application au théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ.	57
- Théorème de BAIRE	57
- Fonctions de première classe de BAIRE	58
- Existence de fonctions \mathcal{C}^∞ et non analytiques sur aucun intervalle	60
- Théorème de BANACH-STEINHAUS ; exercice	61
- Application aux séries de FOURIER	63
- Application à l'interpolation de LAGRANGE	63
III. Espaces métriques compacts	64
A. Définition et exemples.	64
B. Applications continues sur un espace métrique compact.	64
C. Propriété de BOREL-LEBESGUE.	66
D. Ensembles équicontinus.	69
- Définition	69
- Propriétés liées à l'équicontinuité	70
- Théorème d'ASCOLI	71
- Applications	73
- Théorème de CAUCHY-ARZÉLA	74
E. Translatées d'une fonction	77
IV. Connexité	78
V. Activités	81

A. Caractérisation des fonctions polynomiales	81
B. Cordes d'une fonction continue	83
Exercices	86
Solutions	88
3. Fonctions polynomiales	95
I. Approximation des fonctions continues par des fonctions	
polynômes. Extensions	96
A. Le théorème de WEIERSTRASS	96
B. Approximation polynomiale d'une fonction et de ses dérivées	102
C. Théorèmes de MUNTZ	107
II. Meilleure approximation	114
A. Résultats préliminaires liés à la convexité.	114
B. Approximation dans un s.e.v. de dimension finie	117
C. La propriété d'alternance de TCHEBYCHEV	126
Exercices	128
III. Fonctions polynômes prenant des valeurs entières sur des	
entiers. Extension	130
A. Polynômes de HILBERT.	131
B. Fonctions entières prenant des valeurs entières sur \mathbb{N}	133
IV. Fonctions polynômes positives sur un intervalle	139
V. Interpolation de LAGRANGE	149
A. Résolution du problème d'interpolation de LAGRANGE	149
B. Utilisation comme méthode d'approximation	151
C. Stabilité et convergence de l'interpolation	158
D. Interpolation de LAGRANGE-SYLVESTER	163
VI. Interpolation polynomiale par morceaux	169
A. Interpolation linéaire par morceaux	169
B. Impossibilité de « bons raccords » paraboliques	173
C. Bons raccords cubiques	174
D. Les fonctions splines cubiques	177
VII. Polynômes orthogonaux	184
A. Définition	184
Exercices	186
B. Propriétés générales des polynômes orthogonaux	189
Exercices	192
C. Propriétés communes aux polynômes classiques	193
4. Fonctions de référence	209
I. Fonctions monotones	209
A. Monotonie : limite, continuité.	209
B. Monotonie et dérivation.	213
C. Monotonie et intégration	214
D. Structure de $M(I)$	216
E. Autres utilisations de la monotonie.	217

II. Fonctions dérivables	218
A. Théorèmes de base	219
B. Formules de TAYLOR	222
C. Dérivation des suites et séries de fonctions	225
D. Résolution d'équations non linéaires.	227
E. Formule d'EULER MAC LAURIN	248
F. Majoration de polynômes et de leurs dérivées	253
III. La fonction exponentielle	261
IV. Fonctions convexes	265
5. Séries entières, fonctions analytiques	277
I. Compléments sur les séries entières	277
II. Fonctions analytiques	301
III. Exemples de fonctions analytiques	303
A. Fonctions complètement convexes	303
B. Fonctions de classe \mathcal{C}^∞ dont les dérivées gardent un signe constant	305
C. Fonctions absolument monotones	309
D. Fonctions totalement monotones	313
E. Fonctions complètement monotones	316
F. Fonctions de GRUSS ; G-fonctions	316
IV. Fonctions analytiques d'une variable complexe	318
6. Fonctions quasi-analytiques	327
I. Propriétés élémentaires des suites de \mathcal{A}	327
II. Exemples	328
III. Classe quasi-analytique	331
A. Condition nécessaire de quasi-analyticité	332
B. Condition suffisante de quasi-analyticité	334
- Propriétés	335
- Théorème. Formule de BANG	335
- Une condition nécessaire et suffisante de quasi-analyticité	339
C. Un théorème de DENJOY-CARLEMAN	340
- Exercice	342
7. Intégration	345
I. Primitives de fonctions continues	345
II. Intégrale de RIEMANN	347
III. Primitives et intégrales	368
IV. Intégrale de LEBESGUE	374
A. Intégrale supérieure d'un élément de \mathcal{K}^*	375
B. Intégrales supérieure et inférieure de LEBESGUE	377
C. Intégrale de LEBESGUE d'une fonction	383
V. Intégration numérique	409
A. Procédé mécanique de calcul de $\int_I P(t)w(t)dt$	410

B. Majoration de l'erreur	416
C. Les méthodes composées	422
VI. Intégrale de LEBESGUE dans l'espace $\mathbb{R}^m, m \geq 2$	422
Exercices	432
Activités	452
Parties précompactes de $L^p(\mathbb{R})$	452
Problème des moments	456
8. Fonctions à variation bornée	461
I. Exemples et structure algébrique.	461
II. Fonctions à variation bornée et restriction	462
III. Caractérisation des fonctions réelles	462
IV. Propriétés topologiques	464
V. Théorème de JORDAN	465
Lemme de HARDY-LANDAUI	465
VI. Fonctions à variation bornée et dérivation	467
9. Convolution sur la droite	485
I. Définitions, propriétés générales	485
A. Définition	485
B. Support du produit de convolution	485
II. Convolution des fonctions	486
A. Convolution de deux éléments de $L^1(\mathbb{R})$	486
B. Convolution d'un élément de $L^1(\mathbb{R})$ et d'un élément de $L^p(\mathbb{R})$	487
C. Convolution d'un élément de $L^1(\mathbb{R})$ et d'un élément de $L^\infty(\mathbb{R})$	488
D. Convolution d'un élément de $L^p(\mathbb{R})$ et d'un élément de $L^q(\mathbb{R})$	489
E. Convolution d'une fonction f intégrable à support compact et d'une fonction localement de puissance p -ième intégrable sur \mathbb{R}	489
F. Convolution dans E_+	490
III. Régularisation	491
III. Convolution des fonctions périodiques	494
Exercices	497
10. Séries de FOURIER	503
I. Introduction aux séries de FOURIER	503
A. Équation des cordes vibrantes	503
B. Étude des séries trigonométriques	505
II. Coefficients de FOURIER	507
III. Convergence des séries de FOURIER	512
A. Convergence en moyenne quadratique	512
B. Convergence ponctuelle dans le cas d'une fonction de $L^1_{2\pi}$	513
C. Noyaux de sommabilité	516
IV. À propos des opérateurs de FOURIER	518
A. Calcul de la norme de l'opérateur de FOURIER S_n	518
B. Estimation de $\ D_n\ _1$	518
C. Caractère optimal de l'opérateur de FOURIER S_n	518

- Application à l'interpolation de LAGRANGE.	521
V. L'algèbre \mathcal{A}	522
A. Propriétés élémentaires	522
B. Étude de la convergence dans \mathcal{A}	527
C. Caractères de \mathcal{A}	527
D. Caractère local de l'appartenance à \mathcal{A}	528
E. Le théorème de WIENER-LEVY	529
Exercices	530
A. Détermination des séries de FOURIER et applications	530
B. Propriétés des coefficients de FOURIER.	532
C. Séries trigonométriques	535
D. Exercices divers sur les séries de FOURIER	539
11. Fonctions presque-périodiques	545
I. Définition et caractérisations	547
II. Moyenne d'une fonction presque-périodique	550
III. Propriétés de la forme linéaire M	553
IV. Coefficients de FOURIER-BOHR d'une fonction de Π	557
V. Fonction de corrélation. Produit de convolution	558
VI. Transformation de FOURIER-BOHR	559
Exercices	567
12. Transformation de FOURIER	569
I. Propriétés élémentaires	569
II. La cotransformation de FOURIER	573
III. Espace de SCHWARTZ	575
Exercices	576
- Spectre de \mathcal{F}	576
- Formule de POISSON	577
- Noyau de FEJER	577
- Injectivité de la transformée de FOURIER	578
INDEX	579