1. SUITES ET SÉRIES

I. Suites numériques

A. Suites numériques : propriétés de base

On se contente de rappeler les notions fondamentales sur les suites numériques

• Une suite réelle monotone croissante (*resp.* décroissante) converge si, et seulement si, elle est majorée (*resp.* minorée).

• Si une suite converge, toutes ses suites extraites convergent et ont même limite.

• Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et ont même limite ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

• Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont réelles adjacentes si (u_n) croît, (v_n) décroît et $\lim(u_n - v_n) = 0$.

• Deux suites réelles adjacentes convergent et ont même limite.

• **Théorème d'encadrement** : $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles.

si $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \exists \ell \in \mathbb{R},\ \ell = \lim(u_n) = \lim(w_n) \end{cases}$ alors (v_n) converge et sa limite est ℓ.

• **Passage à la limite dans les inégalités** : si $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont trois suites réelles convergentes et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$,
alors : $\lim(u_n) \leqslant \lim(v_n) \leqslant \lim(w_n)$.

• On retiendra : $\begin{cases} u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \text{ et } \lim(v_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{1\} \Rightarrow \ln(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(v_n) \\ e^{u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{v_n} \iff \lim(u_n - v_n) = 0 \end{cases}$

• Une suite réelle ou complexe converge si, et seulement si, elle est de CAUCHY.

• Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexe converge si, et seulement si, les suites réelles $(\Re e(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Im m(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

• Remarque pratique : pour démontrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ (donné ou deviné), on a souvent intérêt à majorer $(|u_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite de limite nulle.

• **Suites définies par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.**
La marche à suivre dans le cas de suites réelles.
• On cherche un intervalle fermé F de $\mathbb{R}$ stable par f tel que, pour un rang n_0 on ait $u_{n_0} \in F$. Les limites éventuelles de (u_n) sont alors dans F et points fixes ou points de discontinuité de f.

On pourra étudier la suite définie par $u_0 \in]0,1]$ et $u_{n+1} = u_n^2 \left[\dfrac{1}{u_n}\right]$ où $[x]$ est la partie entière de x.
• Si F est un intervalle sur lequel f est croissante, alors (u_n) est monotone.

De plus : si (u_n) croît (*resp.* décroît) elle converge si, et seulement si, il existe λ dans F tel que $\lambda = f(\lambda)$ et $u_0 \leqslant \lambda$ (*resp.* $\lambda \leqslant u_0$).

• Si F est un intervalle sur lequel f décroît alors $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont monotones de sens contraires. Si l'une converge alors l'autre aussi et sa limite est point fixe de $f\circ f$, reste à voir si elle est point fixe de f.

• S'il existe $k \in]0,1[$ tel que : $\forall (x,y) \in F^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$
- en particulier si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de F et si $|f'| \leqslant k$ -
alors la suite définie par $u_0 \in F$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge dans F vers l'unique point fixe de f dans F.

Nous reviendrons sur une preuve rapide de ce résultat après la règle de d'ALEMBERT pour les séries.

• Exemples de calcul du terme général d'une suite

• *Récurrence affine* : $\exists (a,b) \in (\mathbb{C}^\star)^2, a \neq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.
Pour évaluer u_n, on dispose de deux méthodes.

L'une d'elles consiste à résoudre $\lambda = a\lambda + b$ (point fixe) ce qui donne $\lambda = \dfrac{b}{1-a}\cdot$ La suite définie par $v_n = u_n - \lambda$ est géométrique de raison a. D'où $v_n = a^n v_0$. Par suite $u_n = a^n(u_0 - \lambda) + \lambda$.

L'autre à poser $w_n = a^{-n}u_n$, d'où $w_{n+1} - w_n = ba^{-n}$, l'expression de w_n s'en déduit par télescopage puis celle de u_n.

• *Homographie* : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$ où $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$.
On résout $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (points fixes) ce qui revient à calculer les racines d'un trinôme du second degré.

S'il y a 2 racines α et β, on pose, sous réserve d'existence : $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\cdot$
La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison q à calculer. $v_n = q^n v_0$, d'où u_n. On peut alors lever la réserve d'existence en trouvant l'ensemble des $u_0 \in \mathbb{C}$ tels que il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_{n_0} = -\dfrac{d}{c}\cdot$

S'il y a une racine double α, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie si $u_0 \neq \alpha$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ est arithmétique, d'où v_n puis u_n.

• *Récurrence linéaire d'ordre 2* : $\exists (a,b) \in \mathbb{K}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
On appelle équation caractéristique $X^2 - aX - b = 0$. On note $\Delta = a^2 + 4b$ son discriminant.

Si $\Delta \neq 0, \exists! (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ avec $r_2 = a - r_1 = -\dfrac{b}{r_1}\cdot$

Si $\Delta = 0, \exists! (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\dfrac{a}{2}\right)^n (\lambda n + \mu)$.

B. Comparaisons

Définitions

Soient $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ suite réelle et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. On dit que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est ***dominée*** par $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et l'on écrit $x_n \underset{n\to\infty}{=} O(\alpha_n)$, si :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n| \leqslant M|\alpha_n|.$$

2. On dit que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est ***négligeable*** devant $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et l'on écrit $x_n \underset{n\to\infty}{=} o(\alpha_n)$ si : $\quad \forall\varepsilon\in]0,+\infty[, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant n_0 \Rightarrow |x_n|\leqslant \varepsilon|\alpha_n|.$

Remarques

• Si $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^\star$ ces relations peuvent aussi être définies par :

(i) $x_n \underset{n\to\infty}{=} O(\alpha_n) \iff \left(\dfrac{x_n}{\alpha_n}\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée

(ii) $x_n \underset{n\to\infty}{=} o(\alpha_n) \iff \left(\dfrac{x_n}{\alpha_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

• $x_n \underset{n\to\infty}{=} o(\alpha_n) \Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{=} O(\alpha_n)$. La réciproque est bien sûr, fausse.

Définition : deux suites complexes $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont dites équivalentes si, et seulement si, $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$, cette relation est notée $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

Remarques

1. Si $(v_n)_n$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^\star$ on a aussi

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } 1.$$

2. $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \Rightarrow |u_n| \underset{n\to\infty}{\sim} |v_n|$.

3. $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites complexes.

4. $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \big(u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n) \text{ et } v_n \underset{n\to\infty}{=} O(u_n)\big)$.

5. $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 0 \iff (u_n)_n$ stationne en 0 : on évitera d'écrire la relation.

6. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ alors : $\ell\neq 0 \Rightarrow u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ell$.

7. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)=\ell$ alors $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n)=\ell$.

C. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS

Toute suite bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ a au moins une valeur d'adhérence.

Théorème

Toute suite bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ayant une unique valeur d'adhérence est convergente

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite bornée de $\mathbb{C}$ ayant a pour unique valeur d'adhérence. Supposons qu'elle ne converge pas vers a. Soit ε un nombre réel strictement positif tel que il existe un entier naturel p vérifiant que pour tout $n\geqslant p$, $|u_n - a|\geqslant\varepsilon$. Par récurrence, on construit $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}-a|\geqslant\varepsilon$. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ étant bornée a une valeur d'adhérence b telle que $|b-a|\geqslant\varepsilon$. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ étant extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, b est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$: absurde.

Exercice : déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $\big(\cos(n\theta)\big)_{n\geqslant 0}, \theta\in\mathbb{R}$.

Comme $\cos(n\theta)$ est à valeurs dans l'intervalle fermé $[-1,1]$, les valeurs d'adhérence de la suite sont dans $[-1,1]$. L'ensemble $G=\{n\theta+2p\pi \mid (n,p)\in\mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

Si $\dfrac{\theta}{2\pi}\in\mathbb{Q}$, $\cos(n\theta)$ prend une infinité de fois un nombre fini de valeurs qui donc ses valeurs d'adhérence.

Si $\dfrac{\theta}{2\pi}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$. Comme cos est continue, l'ensemble $A=\{\cos(n\theta), \mid n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$. Montrons que, dans ce cas, l'ensemble des valeurs d'adhérence est $[-1,1]$.

Soit $x \in]-1,1[$ et $\varepsilon > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
On note $\alpha = \inf\{|x - \cos(n\theta)| \mid 0 \leqslant n \leqslant n_0 \text{ et } \cos(n\theta) \neq x\}$ et $\beta = \min(\alpha, \varepsilon)$.

Il existe $\cos(n\theta) \in]x, x+\beta[$ et d'après la définition de $\alpha, n > n_0$. Donc :
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > n_0$ et $|x - \cos(n\theta| < \varepsilon$
ie. x est valeur d'adhérence de la suite. Comme l'ensemble des valeurs d'adhérence est fermé, c'est $[-1,1]$.

D. Problème : fractions continuées

On note $\mathcal{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, E la fonction partie entière, $f : \mathcal{I} \to \mathcal{I}, x \mapsto \dfrac{1}{x - E(x)}$.

On notera aussi : $f^{<0>} = I$, $f^{<1>} = f$, et si $n \geqslant 1$, $f^{<n>} = f \circ f^{<n-1>}$

Le groupe des matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $(ad - bc)^2 = 1$ sera noté G. Ce groupe opère à gauche de façon naturelle sur $\mathcal{I}$ par la loi : $\forall (x, M) \in \mathcal{I} \times G, M \star x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers telles que : $z_0 \in \mathbb{Z}$ et $z_n \in \mathbb{N}^*$ si $n \geqslant 1$.

Soit $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n(a) = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$.

Si $(N, n) \in \mathbb{N}^2$, $N \leqslant n$, on pose : $M_{n,N}(a) = A_N(a) \cdots A_n(a)$ et $M_n(a) = M_{n,o}(a)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la première colonne de $M_n(a)$ sera notée : $\begin{pmatrix} \alpha_n(a) \\ \gamma_n(a) \end{pmatrix}$.
Si aucune ambiguité n'en résulte, on écrira $A_n, M_{n,N}, M_n, \alpha_n, \gamma_n$ au lieu de $A_n(a), M_{n,N}(a), M_n(a), \alpha_n(a), \gamma_n(a)$.

1. On fixe $a = (a_i) \in \mathcal{S}$ **dans les trois premières questions de ce problème**.
Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \gamma_n(a) \in \mathbb{N}^*\right)$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n(a) = \begin{pmatrix} \alpha_n(a) & \alpha_{n-1}(a) \\ \gamma_n(a) & \gamma_{n-1}(a) \end{pmatrix}\right)$

Dans la suite, le rationnel $\dfrac{\alpha_n(a)}{\gamma_n(a)}$ sera noté $r_n(a)$ ou r_n.

Par récurrence on montre les résultats demandés. De plus, la suite $(\gamma_n(a))$ est strictement croissante.

2. a) Pour $n \geqslant 1$, calculer $\alpha_n \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1}\gamma_n$.
b) Prouver que les suites (γ_n) et (r_{2p}) sont croissantes et que la suite (r_{2p+1}) est strictement décroissante, enfin que la suite (r_n) converge. On note : $\widehat{a} = \lim(r_n)$

a) $M_n = A_0.A_1 \cdots A_n \Rightarrow \det(M_n) = \alpha_n\gamma_{n-1} - \alpha_{n-1}\gamma_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \det(A_k) = (-1)^{n+1}$.

D'où : $\alpha_n\gamma_{n-1} - \alpha_{n-1}\gamma_n = (-1)^{n+1}$.

b) D'après la question 1. la suite $(\gamma_n(a))_{n \geqslant 0}$ est strictement croissante.

$\forall n \geqslant 2, r_n - r_{n-2} = \dfrac{-\alpha_{n-2}\gamma_n + \gamma_{n-2}\alpha_n}{\gamma_n\gamma_{n-2}}$.

D'après 1. on a : $\gamma_{n-2}\alpha_n - \alpha_{n-2}\gamma_n = a_n\big(\gamma_{n-2}\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}\gamma_{n-1}\big)$.

D'après 2.a), $\gamma_{n-2}\alpha_n - \alpha_{n-2}\gamma_n = a_n(-1)^n = (-1)^n \dfrac{\gamma_n - \gamma_{n-2}}{\gamma_{n-1}}$ *d'après 1.*

Donc $r_n - r_{n-2} = (-1)^n \dfrac{\gamma_n - \gamma_{n-2}}{\gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}}\cdot$
Comme la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ *est strictement croissante,* $(r_{2p})_{p\geqslant 0}$ *est strictement croissante et* $(r_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ *est strictement décroissante.*
D'autre part, $r_n - r_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\gamma_n\gamma_{n-1}}\cdot$ *D'où* $r_{2p+1} > r_{2p}$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.
$(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ *étant une suite strictement croissante d'entiers naturels,* $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
En effet, par récurrence $\gamma_n \geqslant n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$. *D'où* $r_n - r_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Les deux suites $(r_{2p})_{p\geqslant 0}$ et $(r_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ *sont adjacentes. Elles ont donc même limite. La suite* $(r_n)_{n\geqslant 0}$ *converge vers cette limite commune.*

3. a) Prouver : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\widehat{a}-r_n| < \dfrac{1}{\gamma_n^2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\widehat{a}-r_n| < \dfrac{1}{\gamma_n\gamma_{n-1}}\cdot$
En déduire que $\widehat{a} \in \mathcal{I}$.
b) Pour n fixé, soit $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $\left|\dfrac{p}{q}-\widehat{a}\right| < |r_n-\widehat{a}|$. Montrer que : $q > \gamma_n$.

a) D'après 2.b), on a : $\forall p \in \mathbb{N},\ r_{2p} < r_{2p+2} < \widehat{a} < r_{2p+1}$.
D'où $0 < \widehat{a} - r_{2p} < r_{2p+1} - r_{2p} = \dfrac{1}{\gamma_{2p}\gamma_{2p+1}} < \dfrac{1}{\gamma_{2p}^2}$ *car* $\gamma_{2p} < \gamma_{2p+1}$.
De même : $0 < r_{2p+1} - \widehat{a} < r_{2p+1} - r_{2p+2} = \dfrac{1}{\gamma_{2p+2}\gamma_{2p+1}} < \dfrac{1}{\gamma_{2p+1}^2}\cdot$
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :* $0 < \left|\widehat{a} - r_n\right| < \dfrac{1}{\gamma_n^2}\cdot$
Donc $\left|\widehat{a} - r_n\right| < |r_n - r_{n-1}| = \dfrac{1}{\gamma_n\gamma_{n-1}}$ *si* $n \geqslant 1$.

- *Supposons que* $\widehat{a} \in \mathbb{Q}$. *Alors il existe* $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ *tel que* $\widehat{a} = \dfrac{p}{q}\cdot$

$\left|\dfrac{p}{q} - \dfrac{\alpha_n}{\gamma_n}\right| < \dfrac{1}{\gamma_n^2} \Rightarrow |p\gamma_n - q\alpha_n| < \dfrac{q}{\gamma_n}\cdot$
Comme $\gamma_n \geqslant n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *si* $n > q$, *on a :* $0 < \dfrac{q}{\gamma_n} < 1$.
Or $p\gamma_n - q\alpha_n \in \mathbb{Z}$. *donc* $p\gamma_n - q\alpha_n = 0$ *ie.* $r_n = \dfrac{\alpha_n}{\gamma_n} = \dfrac{p}{q} = \widehat{a}$ *si* $n > q$.
La suite $(r_n)_{n\geqslant 0}$ *est stationnaire ; absurde puisque* $(r_{2p})_{p\geqslant 0}$ *est strictement croissante. Donc* $\widehat{a}\in\mathcal{I}$.

b) Faisons le raisonnement avec $n = 2k$. *L'autre cas étant analogue.*

- *Si* $\dfrac{p}{q} = r_{2k+1} = \dfrac{\alpha_{2k+1}}{\gamma_{2k+1}}$, *comme* $\dfrac{\alpha_{2k+1}}{\gamma_{2k+1}}$ *est une forme irréductible de* r_{2k+1} *d'après 2.a),* $q \geqslant \gamma_{2k+1} > \gamma_{2k}$.
- *Si* $\dfrac{p}{q} \in]r_{2k}, r_{2k+1}[$ *alors* $0 < \dfrac{p}{q} - r_{2k} < r_{2k+1} - r_{2k} = \dfrac{1}{\gamma_{2k}\gamma_{2k+1}}\cdot$ *D'où* $0 < p\gamma_{2k} - q\alpha_{2k} < \dfrac{q}{\gamma_{2k+1}}\cdot$ *Puisque* $p\gamma_{2k} - q\alpha_{2k} \in \mathbb{N}^*$, *on a :* $q > \gamma_{2k+1} > \gamma_{2k}$.
- *Si* $\dfrac{p}{q} > r_{2k+1}$ *alors* $0 < \dfrac{p}{q} - r_{2k+1} < \dfrac{p}{q} - \widehat{a} < \widehat{a} - r_{2k} < r_{2k+1} - r_{2k} = \dfrac{1}{\gamma_{2k}\gamma_{2k+1}}\cdot$

D'où $0 < p\gamma_{2k+1} - q\alpha_{2k+1} < \dfrac{q}{\gamma_{2k}}\cdot$ *Puisque* $p\gamma_{2k+1} - q\alpha_{2k} \in \mathbb{N}^*$, *on a :* $q > \gamma_{2k}$.

Dans tous les cas, on a : $q > \gamma_{2k} = \gamma_n$. *Donc :* $\left|\dfrac{p}{q} - \widehat{a}\right| < \left|\widehat{a} - r_n\right| \Rightarrow q > \gamma_n$.

4. Soit $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{I}, a \mapsto \widehat{a}$. Fixons $a = (a_i) \in \mathcal{S}$. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$, soit $b^{(N)}$ l'élément de $\mathcal{S}$ tel que $b^{(N)} = (a_{N+i})_{i\in\mathbb{N}}$.

a) Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, et tout $N \geqslant 0, r_p(b^{(N)}) = a_N + \dfrac{1}{r_{p-1}(b^{(N+1)})}\cdot$

b) En déduire que pour tout $N \geqslant 0$, $a_N = \Phi(b^{(N)}) - \dfrac{1}{\Phi(b^{(N+1)})}\cdot$

On admettra que Φ est injective.

a) Par définition, $\begin{pmatrix} a_N & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{N+p} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_p(b^{(N)}) & \alpha_{p-1}(b^{(N)}) \\ \gamma_p(b^{(N)}) & \gamma_{p-1}(b^{(N)}) \end{pmatrix}$ *et*
$\begin{pmatrix} a_{N+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{N+p} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{p-1}(b^{(N+1)}) & \alpha_{p-2}(b^{(N+1)}) \\ \gamma_{p-1}(b^{(N+1)}) & \gamma_{p-2}(b^{(N+1)}) \end{pmatrix}$.

D'où : $\begin{pmatrix} a_N & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{p-1}(b^{(N+1)}) & \alpha_{p-2}(b^{(N+1)}) \\ \gamma_{p-1}(b^{(N+1)}) & \gamma_{p-2}(b^{(N+1)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_p(b^{(N)}) & \alpha_{p-1}(b^{(N)}) \\ \gamma_p(b^{(N)}) & \gamma_{p-1}(b^{(N)}) \end{pmatrix}$
et par suite :

(I) $\quad a_N\alpha_{p-1}(b^{(N+1)}) + \gamma_{p-1}(b^{(N+1)}) = \alpha_p(b^{(N)})$,

(II) $\quad \alpha_{p-1}(b^{(N+1)}) = \gamma_p(b^{(N)}) \in \mathbb{N}^* \Rightarrow r_{p-1}(b^{(N+1)}) \neq 0.$

De (I) et (II) on déduit le résultat que l'on vérifie pour $p = 1$.

b) On sait que $r_{p-1}(b^{(N+1)}) \xrightarrow[p\to\infty]{} \Phi\big(b^{(N+1)}\big) \in \mathcal{I}$. *Donc* $\Phi\big(b^{(N+1)}\big) \neq 0$.

D'où $\dfrac{1}{r_{p-1}(b^{(N+1)})} \xrightarrow[p\to\infty]{} \dfrac{1}{\Phi\big(b^{(N+1)}\big)}\cdot$ *De même,* $r_p(b^{(N)}) \xrightarrow[p\to\infty]{} \Phi\big(b^{(N)}\big)$.

Par passage à la limite quand $p \to \infty$ *dans l'égalité de 4.a), on a le résultat attendu*

5. On donne $x \in \mathcal{I}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n(x) = E(f^{<n>}(x))$.
Montrer que $a(x) = (a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{S}$.
Posant $r_n = (r_n(a(x))), a_n = a_n(x), \alpha_n = \alpha_n(a(x))$ et $\gamma_n = \gamma_n(a(x))$, montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$x = \frac{\alpha_n f^{<n+1>}(x) + \alpha_{n-1}}{\gamma_n f^{<n+1>}(x) + \gamma_{n-1}} \qquad \text{et} \qquad r_{n+1} = \frac{\alpha_n a_{n+1} + \alpha_{n-1}}{\gamma_n a_{n+1} + \gamma_{n-1}}\cdot$$

En déduire : $\forall p \in \mathbb{N},\ r_{2p} < x < r_{2p+1}$, puis : $x = \Phi(a(x))$. Conclure que Φ est bijective.

Soit $\Psi = \Phi^{-1}$; la suite $a(x) = \Psi(x) = (a_n(x))$ est appelée le **développement de *x* en fraction continuée**, et l'on écrira : $x = [a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x), \cdots]$

Les relations ci-dessus peuvent s'écrire :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{f^{<n+1>}(x)}}}} \qquad \text{et} \qquad r_{n+1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}$$

Le nombre r_n est appelé la ***n*-ième réduite** de ce développement et pour les raisons ci-dessus, sera noté symboliquement : $r_n = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$.

a) $x \in \mathcal{I} \Rightarrow 0 < x - E(x) < 1 \Rightarrow f(x) \in]1, +\infty[$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(x) = E\big[f^{<n>}(x)\big] \in \mathbb{N}^*$. *D'où* $a = (a_n) \in \mathcal{I}$.

b) Pour $n \geqslant 1$, *la définition de* f *prouve :* $f^{<n>}(x) = A_n \star f^{<n+1>}(x)$ *avec* $A_n = A_n(a)$ *; d'où, puisque* $f^{<0>}(x) = I_{\mathcal{I}}$, *par une récurrence immédiate :*

$x = \big(A_0 \cdots A_n\big) \star f^{<n+1>}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-1} \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} \end{pmatrix} \star f^{<n+1>}(x).$

D'où $x = \dfrac{\alpha_n f^{<n+1>}(x) + \alpha_{n-1}}{\gamma_n f^{<n+1>}(x) + \gamma_{n-1}}\cdot$

Comme $\begin{pmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-1} \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \alpha_n \\ \gamma_{n+1} & \gamma_n \end{pmatrix}$, *on a aussi*

$\dfrac{\alpha_{n+1}}{\gamma_{n+1}} = r_{n+1} = \dfrac{\alpha_n a_{n+1} + \alpha_{n-1}}{\gamma_n a_{n+1} + \gamma_{n-1}}\cdot$

La fonction $h_n : u \mapsto \dfrac{\alpha_n u + \alpha_{n-1}}{\gamma_n u + \gamma_{n-1}}$ *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *pour tout* $n \geqslant 1$ *car les* γ_i *sont dans* $\mathbb{N}^*$. *On a :* $h_n'(u) = \dfrac{\alpha_n\gamma_{n-1} - \alpha_{n-1}\gamma_n}{\big(\gamma_n u + \gamma_{n-1}\big)^2} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\big(\gamma_n u + \gamma_{n-1}\big)^2}\cdot$

Donc h_{2p+1} *est strictement croissante et* h_{2p} *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_+$.

$\Big($ *Si* $n = 2p, a_{n+1} < f^{<n+1>}(x) \Rightarrow x > r_{2p+1}\big)$ *et* $\Big($ *si* $n = 2p+1,\ x < r_{2p+2}\Big)$.

D'où : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ r_{2p} < x < r_{2p+1}$.

Puisque $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(a)$, *on déduit de l'inégalité précédente* $x = \Phi(a)$. *Donc* Φ *est surjective. D'où, d'après la question 4.* Φ *est bijective de* $\mathcal{S}$ *sur* $\mathcal{I}$.

6. On fixe $x \in \mathcal{I}$, on pose $\psi(x) = (a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$

a) Pour $\lambda \in \mathbb{Z}$, calculer $\psi(x+\lambda)$ en fonction des $a_i(x)$.

b) Si $x > 0$, calculer $\psi(1/x)$ en fonction des $a_i(x)$.

c) Si $p \in \mathbb{N}$, calculer $\psi(f^{<p>}(x))$ en fonction des $a_i(x)$.

a) Il est facile de voir que $a_0(x+\lambda) = a_0(x) + \lambda$ et $a_i(x+\lambda) = a_i(x)$ *si* $i \geqslant 1$.

b) • *Si* $x < 1$, *alors* $f(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$ *Donc :* $\forall i \in \mathbb{N},\ a_i\Big(\dfrac{1}{x}\Big) = a_{i+1}(x)$.

• *Si* $x > 1$, *alors* $\dfrac{1}{x} < 1$ *; donc* $a_0\Big(\dfrac{1}{x}\Big) = 0$ et $a_i\Big(\dfrac{1}{x}\Big) = a_{i-1}(x)$ *pour* $i \geqslant 1$.

En conclusion : si $0 < x < 1$, $\dfrac{1}{x} = \big[a_1, \ldots, a_n, \ldots\big]$

si $x > 1$, $\dfrac{1}{x} = \big[0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\big]$.

c) Soit $y = f^{<p>}(x)$. *Pour* $n \geqslant 0, f^{<n>}(x) = f^{<p+n>}(x)$.

D'où $y = \big(A_p \cdots A_{p+n}\big) \star f^{<n>}(x)$. *Donc, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_{p+n}(y) = a_n(y)$.

EXERCICES

1. On considère $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$ pour $n \geqslant 1$.

a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent et ont même limite que l'on notera e. Montrer que $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ v_n - v_{n+1} \leqslant v_n - e \leqslant v_n - u_{n+3}$. En déduire un équivalent de $e - v_n$.

c) Étudier la suite de terme général $\sin(\pi e n!)$.

2. Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+^\star)^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_0, u_1) \in]0,1[^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \leqslant u_n u_{n+1}$. Montrer que :

$\exists (r, C) \in]0,1[\times]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant C r^{(\rho^n)}$ où $\rho = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$

3. Si $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ on définit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}.$$

a) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Étudier $(u_n)_{n\geqslant 1}$ si $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.

b) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge si, et seulement si, la suite $(a_n^{(2^{-n})})$ est majorée.

c) Examiner les cas $a_n \in \left\{n, n!, n^n, (n!)^n, n^{n!}, n^{n^2}\right\}$ ou encore a_n est la n-ième décimale de π.

4. Exemple des intégrales de WALLIS

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$.

a) Montrer en intégrant par parties que pour tout $n \geqslant 2, nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

En déduire pour $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \dfrac{\pi(2p)!}{2(2^p p!)^2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.

b) Montrer que $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

On pourra procéder par étapes :

(i) prouver que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et à termes strictement positifs ;

(ii) prouver que $I_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} I_n$;

(iii) établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = (n+1)I_nI_{n+1}$ est constante ; et conclure.

II. Séries numériques

A. Généralités

A.1. Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, on appelle suite des sommes partielles la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On appelle série de terme général u_n le couple $\big((u_n)_{n\geqslant 0}, (S_n)_{n\geqslant 0}\big)$. On dit que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge, sinon elle est dite divergente. En cas de convergence, le nombre $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ est appelé somme de la série et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le reste de rang n, $R_n = S - S_n$.

Notations : $\sum u_n$ désigne la série de terme général u_n, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sa somme en cas de convergence.

Remarques

1. On ne modifie pas la nature (convergence ou divergence) de $\sum u_n$ en modifiant un nombre fini de ses termes car on ajoute une constante à S_n à partir d'un certain rang, la convergence de la série associée à $(u_n)_{n\geqslant 0}$ équivaut donc à celle de la série associée à $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ si n_0 est un entier fixé. C'est pourquoi, dans tout ce chapitre, on ne traitera que le cas d'une suite $(u_n)_n$ définie à partir du rang 0, le cas général s'y ramenant. Par contre les exemples pourront utiliser une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.