Dans tout le problème l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est considéré comme le plan affine euclidien muni de son repère orthonormé canonique $(0,1,i)$ (où $i^2=-1$).

• On notera K l'ensemble des triplets (α,β,γ) de $\mathbb{R}^3$ constitués de trois réels positifs ou nuls tels que $\alpha+\beta+\gamma=1$.

• Si $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, on notera $\widehat{abc}$ le « triangle plein » défini par :

$$\widehat{abc}=\{\alpha a+\beta b+\gamma c\,|\,(\alpha,\beta,\gamma)\in K\}\cdot$$

Dans tout le probléme on notera τ_0,τ_1 et τ les triangles pleins définis par : $\tau_0=\widehat{-10i}$, $\tau_1=\widehat{01i}$ et $\tau=\widehat{-11i}$.

• On notera également ϕ_0 et ϕ_1 les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par (en notant $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z) :

$$\phi_0(z)=\frac{1+i}{2}\overline{z}+\frac{-1+i}{2}\quad\text{et}\quad\phi_1(z)=\frac{1-i}{2}\overline{z}+\frac{1+i}{2}\cdot$$

• La notation $\{0,1\}^{\mathbb{N}^\star}$ désignera l'ensemble des suites $(r_n)_{n\geqslant1}$ d'entiers naturels tels que $r_n\in\{0,1\}$ pour tout entier naturel non nul n.

• La norme de la convergence uniforme sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ est notée $\|.\|_\infty$.

• La partie entière du réel x est notée $[x]$. Si n est un entier naturel on posera, pour tout réel x et tout entier naturel non nul n :
$r_n(x)=[2^nx]-2[2^{n-1}x]$.

• On notera $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{k}{2^n}$ où $k\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$.

• On rappelle enfin que, si $(X_n)_{n\geqslant1}$ est une famille de parties de $\mathbb{C}$ indexées sur $\mathbb{N}^\star$, on a $\displaystyle\bigcap_{n\geqslant1}X_n=\{z\in\mathbb{C}\mid\forall n\in\mathbb{N}^\star,z\in X_n\}\cdot$

L'objectif du problème est la construction d'une application f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ dont l'image $f([0,1])$ est le triangle plein τ et l'étude de quelques unes de ses propriétés.

Partie I - Préliminaires géométriques

I.A -

I.A.1) Établir que $\tau=\tau_0\cup\tau_1$.

I.A.2) Représenter sur une même figure τ_0,τ_1,τ.

I.A.3)
a) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Prouver que l'image z' du complexe z par la réflexion dont l'axe est la droite passant par a et dirigée par $e^{i\theta}$ vérifie la relation : $z' - a = e^{2i\theta}\,\overline{(z-a)}$.

b) Établir une relation analogue à celle de la question précédente entre un complexe z et son image z' par l'homothétie de centre a et de rapport $\rho > 0$.

c) Démontrer que ϕ_0 est la composée d'une réflexion dont on précisera l'axe et d'une homothétie de rapport strictement positif à préciser et dont le centre appartient à l'axe de la réflexion. Prouver une propriété analogue pour ϕ_1. Ces décompositions sont-elles uniques ?

I.A.4) Que vaut l'image d'un triangle plein $\widehat{abc}$ par ϕ_0 et par ϕ_1 ? Déterminer $\phi_0(\tau)$ et $\phi_1(\tau)$.

I.B - (Diamètre d'un triangle plein)
I.B.1)
a) Démontrer que K est un compact de $\mathbb{R}^3$ pour sa topologie usuelle.

b) Démontrer que K est convexe c'est à dire que, pour tout réel $t \in [0,1]$ et tout couple (u,v) d'éléments de $K, tu + (1-t)v$ appartient à K.

c) Établir que, si $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, $\widehat{abc}$ est un compact convexe de $\mathbb{C}$ muni de sa topologie usuelle.

d) Avec les mêmes notations prouver l'existence de :

$$\delta(\widehat{abc}) = \max\{|z'-z| \mid (z,z') \in \widehat{abc}^{\,2}\}.$$

I.B.2)
a) Démontrer que, si l'on fixe $z \in \mathbb{C}$ et $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$

$$\max\{|z'-z| \mid z' \in \widehat{abc}^{\,2}\} = \max\big(|z-a|, |z-b|, |z-c|\big).$$

b) En déduire une expression simple de $\delta(\widehat{abc})$.

I.B.3) Soit $(r_n)_{n\geqslant 1}$ un élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^\star}$. Pour chaque entier naturel non nul n, on note $\widetilde{\tau_n} = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \cdots \circ \phi_{r_n}(\tau)$.

Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\geqslant 1} \widetilde{\tau_n}$ est réduit à un seul point appartenant à τ.

Partie II - Construction de l'application f

II - Dans la suite on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telles que $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$. Si $g \in \mathcal{E}$, on note Tg l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$Tg(x) = \phi_0(g(2x)) \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } Tg(x) = \phi_1(g(2x-1)) \text{ si } \in \left]\frac{1}{2}, 1\right].$$

II.1) Déterminer l'unique élément f_0 de $\mathcal{E}$ qui soit affine.

II.2) Montrer que $Tg \in \mathcal{E}$ pour tout $g \in \mathcal{E}$.

II.3) Soient g_1 et g_2 deux éléments de $\mathcal{E}$. Prouver que :

$$\|Tg_1 - Tg_2\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}\|g_1 - g_2\|_\infty.$$

II.4) On définit maintenant une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ en choisissant f_0 affine comme ci-dessus et $f_{n+1} = Tf_n$ pour tout entier naturel n.

a) Prouver que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $f \in \mathcal{E}$.

b) Prouver que $Tf = f$.

c) Prouver que, pour tout $x \in [0,1], f(x) = -\overline{f(1-x)}$ et interpréter géométriquement cette relation.

Partie III - Propriétés de f

III.A - Image de f

III.A.1) Soit $(r_n)_{n\geqslant 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^\star}$.

a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{r_n}{2^n}$ converge et que sa somme x appartient à $[0,1]$.

b) En posant pour tout entier naturel $p, x_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+p}}{2^n}$, prouver la relation :

$f(x) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \cdots \circ \phi_{r_p}(f(x_p))$ pour tout entier naturel non nul p.

III.A.2) Inversement, soit $x \in [0,1[$.

a) Établir que, pour tout entier naturel non nul $n, r_n(x) \in \{0,1\}\cdot$

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul N et tout réel $x \in [0,1[$

$$\frac{[2^N x]}{2^N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n(x)}{2^n} \text{ puis } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}.$$

c) Montrer que si, en outre, $x \in \mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{2}\right]$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $r_n(x) = 0$ pour tout entier naturel $n > N$.

d) Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{1}{4}\right)\cdot$ Reconnaître $\phi_0 \circ \phi_0$ et en déduire $f\left(\dfrac{1}{2^k}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

III.A.3)

a) Montrer que $f\left([0,1]\cap\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right)\subset\tau$.

b) Montrer que $f([0,1])\subset\tau$.

III.A.4) Inversement, soit $z\in\tau$.

a) Montrer qu'on peut définir deux suites $(z_n)_{n\geqslant 0}$ et $(r_n)_{n\geqslant 1}$ de la manière suivante :

- $z_0=z$ et, si $n\geqslant 1$:
- si $z_{n-1}\in\tau_0$ alors $r_n=0$ et $z_n=(\phi_0)^{-1}(z_{n-1})$
- sinon $r_n=1$ et $z_n=(\phi_1)^{-1}(z_{n-1})$.

Prouver que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, z_n appartient à τ.

b) Prouver que $f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{2^n}\right)=z$ (on pourra exprimer z en fonction de z_n et des ϕ_{r_i}).

c) Écrire une fonction qui prend en argument un complexe z (que l'on supposera dans τ) et un réel ε et qui renvoie une valeur approchée à ε près d'un antécédent de z.

III.A.5)

a) Prouver que f n'est pas injective (on pourra utiliser la relation $f(1-x)=-\overline{f(x)}$.)

b) Plus généralement montrer qu'il n'existe aucune bijection continue de $[0,1]$ sur τ (on pourra utiliser un argument de connexité par arcs).

III.A.6)

a) Pour $(i,j)\in\{0,1\}^2$, déterminer l'expression complexe de $\phi_i\circ\phi_j$ la reconnaître, préciser son point fixe et l'image de τ. Faire un dessin.

b) Soient $r_1,r_2,\dots,r_p$ des éléments de $\{0,1\}\cdot$
Prouver que $\phi=\phi_{r_1}\circ\phi_{r_2}\cdots\circ\phi_{r_p}$ possède un unique point fixe que l'on ne cherchera pas nécessairement à exprimer simplement.

c) Exhiber, à l'aide de l'application f, un point fixe de ϕ.

d) Montrer que l'ensemble X des complexes z qui sont point fixe de la composée d'un nombre fini d'applications ϕ_0 et ϕ_1 est dense dans τ.

III.B - Dérivabilité de f

III.B.1) Supposons que f soit dérivable sur $[0,1]$.

Soient $x\in[0,1]$, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites d'élements de $[0,1]$, convergentes vers x et telles que $\alpha_n<x\leqslant\beta_n$ et $\alpha_n<\beta_n$ pour tout n. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$ converge vers $f'(x)$.

III.B.2) Soit $x\in[0,1]$

a) Si $x\in[0,1[$, en choisissant : $\alpha_n = \dfrac{r_1(x)}{2} + \cdots + \dfrac{r_n(x)}{2^n}$ et $\beta_n = \alpha_n + \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, prouver que f n'est pas dérivable en x.

b) Prouver que f n'est pas dérivable en 1.

Solution

Partie I

I.A.

I.A.1) $z\in\tau$ si, et seulement si, il existe $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}_+$ tel que $\alpha+\beta+\gamma=1$ et $z=-\alpha+\beta++i\gamma$.

Si $\beta\geqslant\alpha$ posons $\beta'=\beta-\alpha, \alpha'=2\alpha, \gamma'=\gamma$. Alors $\alpha',\beta',\gamma'\in\mathbb{R}_+$, $\alpha'+\beta'+\gamma'=1$ et $z=\beta'+i\gamma'$. Donc $z\in\tau_1$.

Si $\beta<\alpha$, posons $\alpha'=\alpha-\beta, \beta'=2\beta, \gamma'=\gamma$. Alors $\alpha',\beta',\gamma'\in\mathbb{R}_+$, $\alpha'+\beta'+\gamma'=1$ et $z=-\alpha'+i\gamma'$. Donc $z\in\tau_0$.

En conclusion, $\tau=\tau_0\cup\tau_1$. Le lecteur aura noté que le « si, et seulement si, » nous permet de montre d'un coup la double inclusion.

I.A.2) Dessin immédiat.

I.A.3)

a) Soit r la réflexion d'axe la droite passant par a et de direction $e^{i\theta}$. Notons M, M', A les points d'affixes respectifs z, z', a,

$AM=AM'$ et $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AM'})=2\theta-(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AM})$.

Donc $|z'-a|=|z-a|$ et $\arg(z'-a)\equiv 2\theta-\arg(z-a)\ [2\pi]$.

D'où $\arg(z'-a)\equiv 2\theta+\arg\overline{(z-a)}\ [2\pi]$

i.e. $\arg(z'-a)\equiv \arg\left(e^{2i\theta}\overline{(z-a)}\right)\ [2\pi]$. D'où le résultat demandé.

b) L'homothétie de centre a et de rapport ρ est définie par $z'-a=\rho(z-a)$.

c) $\dfrac{-1+i}{2}+1=\dfrac{1+i}{2}$ et $1+i=\dfrac{1}{\sqrt2}e^{i\pi/4}$. Donc $\phi_0(z)+1=\dfrac{1}{\sqrt2}e^{i\pi/4}\,\overline{(z+1)}$.

Donc ϕ_0 est la composée de l'homothétie de centre (-1) et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt2}$ et de la réflexion d'axe la droite passant (-1) de direction $e^{i\pi/8}$.

De même $\phi_1(z)-1=\dfrac{1}{\sqrt2}e^{-i\pi/4}\,\overline{(z-1)}$. Donc ϕ_1 est la composée de l'homothétie de centre (1) et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt2}$ et de la réflexion d'axe la droite passant 1 de direction $e^{-i\pi/8}$.

Si $\phi_0 = h_1 \circ r_1 = h_2 \circ r_2$ où pour $i \in \{1, 2\}$ h_i est l'homothétie de centre a_i, de rapport k_i et r_i une réflexion telle que a_i soit sur l'axe de r_i.
a_1 et a_2 sont deux points fixes de ϕ_0, donc $a_1 - a_2 = \dfrac{1+i}{2}\overline{(a_1 - a_2)}$.
D'où $|a_1 - a_2| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|a_1 - a_2|$ qui implique $a_1 = a_2$.

$h_1 \circ r_1 = h_2 \circ r_2 \Rightarrow h_1^{-1} \circ h_2 = r_2^{-1} \circ r_1$.
h_1 et h_2 étant des homothéties de même centre, $h_1^{-1} \circ h_2$ est une homothétie de rapport $k_1^{-1}k_2$. Comme $r_2^{-1} \circ r_1$ est une isométrie, $k_1^{-1}k_2 = 1$. Donc $h_1 = h_2$ et $r_1 = r_2$. Il s'ensuit que la décomposition de ϕ_0 est unique. Il en va de même de ϕ_1.

I.A.4) $z \in \widehat{abc} \iff z = \alpha a + \beta b + \gamma c$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
Donc $\phi_0(z) = \dfrac{1+i}{2}\overline{z} + \dfrac{-1+i}{2} = \alpha\phi_0(a) + \beta\phi_0(b) + \gamma\phi_0(c)$ car $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
Il s'ensuit que $\phi_0(\widehat{abc}) = \widehat{a_0b_0c_0}$ où $a_0 = \phi_0(a), b_0 = \phi_0(b)$ et $c_0 = \phi_0(c)$.
De même, $\phi_1(\widehat{abc}) = \widehat{a_1b_1c_1}$ où $a_1 = \phi_1(a), b_1 = \phi_1(b)$ et $c_1 = \phi_1(c)$.
En particulier $\phi_0(\tau) = \tau_0$ et $\phi_1(\tau) = \tau_1$.

I.B -

I.B.1)
a) L'application $\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha + \beta + \gamma - 1$ est continue en tant qu'application polynomiale. Donc $\theta^{-1}(\{0\})$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathbb{R}_+$ est un demi-plan fermé de $\mathbb{R}$, la partie $(\mathbb{R}_+)^3$ est fermée dans $\mathbb{R}^3$. Il s'ensuit que $K = (\mathbb{R}_+)^3 \cap \theta^{-1}(\{0\})$ est fermée dans $\mathbb{R}^3$.

Si $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$, alors $0 \leqslant \alpha \leqslant 1, 0 \leqslant \beta \leqslant 1$ et $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ *i.e.* $K \subset [0, 1]^3$. La partie K est bornée dans $\mathbb{R}^3$. En tant que partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel de dimension finie, K est compact de $\mathbb{R}^3$.

b) $\theta^{-1}(\{0\})$ étant un plan de $\mathbb{R}^3$, est convexe. Comme $(\mathbb{R}_+)^3$ est aussi convexe dans $\mathbb{R}^3$, et comme l'intersection de deux convexes est convexe, K est convexe.

c) $\widehat{abc}$ étant l'image du convexe K par l'application linéaire θ_1 définie par $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha a + \beta b + \gamma c$, est convexe. De plus $\widehat{abc}$ est l'image du compact K par l'aplication continue θ_1. Donc $\widehat{abc}$ est compacte dans $\mathbb{C}$.

d) L'application $\widehat{abc}^2 \to \mathbb{R}, (z, z') \mapsto |z - z'|$ étant continue sur le compact $\widehat{abc}^2$ de $\mathbb{C}^2$, elle est bornée et atteint ses bornes. D'où l'existence de $\delta(\widehat{abc})$.

I.B.2)
a) z est fixé et $z' = \alpha a + \beta b + \gamma c$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Donc $|z - z'| = |\alpha(z - a) + \beta(z - b) + \gamma(z - c)| \leqslant \alpha|z - a| + \beta|z - b| + \gamma|z - c|$.
D'où $|z - z'| \leqslant (\alpha + \beta + \gamma) \max\big(|z-a|, |z-b|, |z-c|\big) = \max\big(|z-a|, |z-b|, |z-c|\big)$ puisque $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
En particulier $\max\{|z - z'| \mid z' \in \widehat{abc}\} \leqslant \max\big(|z - a|, |z - b|, |z - c|\big)$.
Comme $a, b, c \in \widehat{abc}$, on a $\max\{|z - z'| \mid z' \in \widehat{abc}\} = \max\big(|z - a|, |z - b|, |z - c|\big)$.

b) $\delta(\widehat{abc}) = \max\limits_{z\,\in\,\widehat{abc}} \max\limits_{z'\,\in\,\widehat{abc}} |z-z'| = \max\limits_{z\,\in\,\widehat{abc}} \Big(\max\big(|z-a|,|z-b|,|z-c|\big)\Big)$.
Donc $\delta(\widehat{abc}) = \max\Big(\max\limits_{z\,\in\,\widehat{abc}} |z-a|,\ \max\limits_{z\,\in\,\widehat{abc}} |z-b|,\ \max\limits_{z\,\in\,\widehat{abc}} |z-c|\Big)$.
D'après I.B.2)a), $\max\limits_{z\,\in\,\widehat{abc}} |z-a| = \max(|b-a|,|c-a|)$,
$\max\limits_{z\,\in\,\widehat{abc}} |z-b| = \max(|a-b|,|c-b|)$ et $\max\limits_{z\,\in\,\widehat{abc}} |z-c| = \max(|a-c|,|b-c|)$.
Donc $\delta(\widehat{abc}) = \max\big(|b-a|,|c-a|,|b-c|\big)$.
I.B.3) Notons $\Phi_n = \phi_{r_1}\circ\phi_{r_2}\cdots\circ\phi_{r_n}$ et $F_n = \Phi_n(\tau)$.
Alors $F_{n+1} = \Phi_n(\phi_{r_{n+1}}(\tau)) \subset \Phi_n(\tau) = F_n$ car $\phi_{r_{n+1}}(\tau)\subset\tau$ d'après I.A.4)
F_n est compacte donc fermée en tant qu'image directe du compact τ par l'application continue Φ_n. En tant que composée d'applications affines, Φ_n est affine. Un raisonnement analogue à celui de I.A.4), donne $F_n = \widehat{a_n b_n c_n}$ où $a_n = \Phi_n(a), b_n = \Phi_n(b)$ et $c_n = \Phi_n(c)$. D'après I.B.2),
$\delta(F_n) = \max\big(|b_n-a_n|,|c_n-a_n|,|b_n-c_n|\big)$.
Or $|\Phi_n(z)-\Phi_n(z')| = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |z-z'|$, donc $\delta(F_n) \leqslant \dfrac{\delta(\tau)}{2^{n/2}}$ ce qui implique $\delta(F_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par encadrement. Une intersection de fermés F_n de l'espace complet $\mathbb{C}$ dont les diamètres tendent vers 0 est réduite à un point. Ce point est dans τ car $F_n\subset\tau$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Partie II

II.1) Comme f_0 est affine, $f_0(x) = \lambda x+\mu$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$.
$f_0\in\mathcal{E} \Rightarrow f_0(0) = -1$ et $f_0(1) = 1$. Donc $\mu = -1$ et $\lambda = 2$.
La seule application affine de $\mathcal{E}$ est $f_0 : x\mapsto 2x-1$.
II.2) $Tg(0) = \phi_0(g(0)) = \phi_0(-1) = -1$ et $Tg(1) = \phi_1(g(1)) = \phi_1(1) = 1$.
En tant que composée d'applications continues, Tg est continue sur les intervalles $\left[0,\dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2},1\right]$.
$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} Tg(x) = \phi_0(g(1)) = \phi_0(1) = i$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} Tg(x) = \phi_1(g(0)) = \phi_1(-1) = i$.
Donc T_g est continue sur $[0,1]$. D'où $Tg\in\mathcal{E}$ si $g\in\mathcal{E}$.
II.3) $\|Tg_1-Tg_2\|_\infty = \max\left[\sup\limits_{x\,\in[0,\frac{1}{2}]} |Tg_1(x)-Tg_2(x)|,\ \sup\limits_{x\,\in[\frac{1}{2},1]} |Tg_1(x)-Tg_2(x)|\right]$
$\forall x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right], |Tg_1(x)-Tg_2(x)| = \left|\dfrac{1+i}{2}\Big(\overline{g_1(2x)-g_2(2x)}\Big)\right|$.
Donc $\sup\limits_{x\,\in[0,\frac{1}{2}]} |Tg_1(x)-Tg_2(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|g_1-g_2\|_\infty$
De même, $\forall x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right], |Tg_1(x)-Tg_2(x)| = \left|\dfrac{1-i}{2}\Big(\overline{g_1(2x-1)-g_2(2x-1)}\Big)\right|$.
Donc $\|Tg_1-Tg_2\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|g_1-g_2\|_\infty$.

II.4) a) D'après II.3) $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \|f_{n+1} - f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$.

(*cf.* suites géométriques) $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_{n+1} - f_n\|_\infty = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty$.

Comme la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ converge, la série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement *a fortiori* uniformément sur $[0,1]$. D'après le critère suite/séries, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction notée f.

Un raisonnement par récurrence et II.2) impliquent que les f_n sont continues sur $[0,1]$. Donc, par théorème, f est continue sur $[0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$.
Par passage à la limite, $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. D'où $f \in \mathcal{E}$.

b) D'après II.3), pour tout $n \in \mathbb{N}, \|Tf_n - Tf\|_\infty = \|f_{n+1} - Tf\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|f_n - f\|_\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|f_{n+1} - Tf\|_\infty = 0$ Donc la suite (f_{n+1}) converge uniformément sur $[0,1]$ vers Tf. Par unicité de la limite, $f = Tf$.

c) $f_0(x) = 2x - 1 \Rightarrow f_0(1-x) = \overline{f_0(1-x)} = 1 - 2x = -f_0(x)$.
Supposons $\forall x \in [0,1], \overline{f_n(1-x)} = -f_n(x)$.
$\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[, Tf_n(1-x) = \phi_1\big(f_n(2(1-x)-1)\big) = \dfrac{1-i}{2}\,\overline{f_n(1-2x)} + \dfrac{1+i}{2}$.
$\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[, f_{n+1}(1-x) = -\dfrac{1-i}{2} f_n(2x) + \dfrac{1+i}{2} = -\overline{\left(\dfrac{1+i}{2}\overline{f_n(2x)} + \dfrac{-1+i}{2}\right)}$
$\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[, f_{n+1}(1-x) = \overline{\phi_0(f_n(2x))} = -\overline{Tf_n(x)}$
i.e. $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[, f_{n+1}(1-x) = -\overline{f_{n+1}(x)}$.

Posons $x' = 1 - x$, alors $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[\iff x' \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
Donc $f_{n+1}(x') = -\overline{f_{n+1}(1-x')}$. Par conjugaison, $f_{n+1}(x) = -\overline{f_{n+1}(1-x)}$.
Donc, $\forall x \in [0,1], f_{n+1}(x) = -\overline{f_{n+1}(1-x)}$.
Par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], f_n(x) = -\overline{f_n(1-x)}$.

Par passage à la limite $\forall x \in [0,1], f(x) = -\overline{f(1-x)}$.

Interprétation géométrique : $f(x)$ est image de $f(1-x)$ par la réflexion d'axe Oy *i.e.* le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe imaginaire.

Partie III

III.A)

III.A.1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \dfrac{r_n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Comme la série géométrique $\sum \dfrac{1}{2^n}$ converge, la série à termes positifs $\sum \dfrac{r_n}{2^n}$ converge et sa somme x vérifie