Le but de ce problème est de faire établir le résultat suivant d'approximation polynomiale.

Une fonction f continue sur le segment $[-1,1]$ y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si, et seulement si, il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales, où p_n est de degré n, telle que $\sup\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-p_n(x)|$ tende vers 0 pour $n\to\infty$ plus vite que n'importe quelle puissance de $1/n$.

L'approche proposée consiste à se ramener à des résultats connus sur l'approximation des fonctions périodiques par leurs séries de Fourier, au moyen des polynômes de Tchebychev, dont on étudiera les principales propriétés dans la partie I. La partie II établit certaines inégalités dues à Markov et à Bernstein, permettant de majorer la norme infinie de la dérivée d'une fonction polynomiale sur un segment à l'aide de la norme infinie de la fonction polynomiale sur le même segment. La partie III établit le résultat annoncé concernant l'approximation à l'aide, en particulier, des inégalités de Markov et de Bernstein.

On rappelle qu'une fonction polynomiale non nulle, de degré n, est une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ où $a_0,\dots,a_{n-1}$ sont des nombres réels et a_n un nombre réel non nul, nommé « coefficient dominant de f ».

Partie I - Polynômes de Tchebychev

I.A - Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on pose $F_n(x)=\cos(n\arccos(x))$.

I.A.1)

a) Montrer que les fonctions F_n sont définies sur un même domaine D à préciser.

b) Calculer $F_1(x), F_2(x)$ et $F_3(x)$ pour tout $x\in D$.

c) Calculer $F_n(1), F_n(0)$ et $F_n(-1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

d) Préciser les propriétés de parité de F_n en fonction de n.

I.A.2) Calculer $F_{n+1}(x)+F_{n-1}(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in D$.

I.A.3) Déduire de ce qui précède que F_n se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction polynomiale unique, dont on précisera le degré ainsi que le coefficient dominant.

Dans la suite, on notera toujours F_n la fonction prolongée.

I.A.4) Écrire une fonction **tchebychev** qui prend en argument un nombre entier n et qui renvoie l'affichage de l'expression $F_n(x)$. On utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel usuellement utilisé.

Dans toute la suite de ce problème, on posera $T_0(x) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera T_n la fonction polynomiale vérifiant $T_n(x) = 2^{1-n}F_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.A.5) Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star, T_{n+2}(x) = axT_{n+1}(x) + bT_n(x).$$

I.B -

I.B.1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la fonction F_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $x \in]-1, 1[$, donner une expression simple de $F_n'(x)$. On justifiera soigneusement le calcul.

I.B.2) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) Montrer que $\arccos(x) \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

b) En déduire le calcul de $F_n'(1)$ et $deF_n'(-1)$.

I.B.3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x réel, on a la relation suivante : $(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$.

I.C - On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales de degré au plus n.

I.C.1) Montrer que, pour tout couple (f, g) de $E \times E$, la fonction :
$x \mapsto f(x)g(x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur l'intervalle $]-1, 1[$.

I.C.2) La question précédente montre que l'application φ suivante est bien définie. $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

Dans la suite, on suppose que l'espace E est muni de ce produit scalaire, que l'on note $(\cdot|\cdot)$.

I.C.3)

a) Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n$ soit de degré n et de coefficient dominant 1, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star, p_n$, soit orthogonale à tous les éléments de E_{n-1}.

b) Montrer qu'il existe une unique famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales vérifiant les conditions suivantes :

i) la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\big(\cdot|\cdot\big)$. ;
ii) pour tout $n\in\mathbb{N}$, Q_n est de degré n et de coefficient dominant 1.

I.C.4) Calculer $\big(T_n|T_n\big)$ pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Que peut-on en déduire ?

Partie II - Inégalités de Bernstein et de Markov

II.A -

II.A.1) On cherche à montrer que l'inégalité $|\sin(n\theta)| \leqslant n\sin(\theta)$ est satisfaite pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que $\sin(n\theta) \leqslant n\sin(\theta)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ et tout $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2n}\right]$.

b) Montrer que, pour tout $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $\sin(\theta)\geqslant\dfrac{2}{\pi}\theta$.

c) En déduire que : $\forall\theta\in\left[\dfrac{\pi}{2n},\dfrac{\pi}{2}\right], 1\leqslant n\sin(\theta)$.

d) Conclure.

e) Pour quelles valeurs de $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ a-t-on $|\sin(n\theta)| = n\sin(\theta)$?

II.A.2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]}|T_n'(x)| = 2^{1-n}n^2$.

Cette borne supérieure est-elle atteinte ? Dans l'affirmative, préciser pour quelles valeurs de x.

II.A.3) Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Montrer que la fonction polynomiale T_n admet exactement n zéros deux à deux distincts et appartenant à $]-1,1[$. Pour $j\in\{1,2,\dots,n\}$, on notera $x_{n,j}$ le j-ième zéro de T_n dans l'ordre croissant. Donner la valeur de $x_{n,j}$.

II.A.4) Soit $n\in\mathbb{N}^\star, x\in\mathbb{R}\setminus\{x_{n,j},\ 1\leqslant j\leqslant n\}$ et $P\in E_{n-1}$. Montrer que

$$\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x-x_{n,j}}.$$

II.A.5) Soient $n\in\mathbb{N}^\star$ et $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_{n,j},\ 1\leqslant j\leqslant n\}$.

a) Montrer que : $\displaystyle P(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{P(x_{n,j})}{T_n'(x_{n,j})}\frac{T_n(x)}{x-x_{n,j}}$.

b) En déduire que :

$$P(x) = \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sqrt{1-x_{n,j}^2}\,P(x_{n,j})\frac{T_n(x)}{x-x_{n,j}}.$$

II.B - Inégalité de Bernstein

II.B.1) Montrer que, pour tout $x\in[x_{n,1},x_{n,n}]$, on a : $\sqrt{1-x^2}\geqslant\dfrac{1}{n}$.

II.B.2) a) Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $P \in E_{n-1}$ tel que $\sup\limits_{x\,\in[-1,1]} \sqrt{1-x^2}|P(x)| \leqslant 1$.

Montrer que : $\sup\limits_{x\,\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant n$ (On distinguera trois cas selon que x appartient à l'un des intervalles $[-1, x_{n,1}[$ $[x_{n,1}, x_{n,n}]$ ou $]x_{n,n}, 1]$).

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $P \in E_{n-1}$, on a :

$$\sup_{x\,\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant n \sup_{x\,\in[-1,1]} \sqrt{1-x^2}|P(x)|$$

II.B.3) Soit T un polynôme trigonométrique de la forme

$$T(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)]$$

où $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une fonction polynomiale B_k de degré $(k-1)$ telle que : $\qquad \forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(k\theta) = B_k(\cos(\theta))\sin(\theta)$.

b) Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe une fonction polynomiale $P \in E_{n-1}$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ait : $T(\theta_0 + \theta) - T(\theta_0 - \theta) = 2P(\cos(\theta))\sin(\theta)$.

c) En déduire que : $\sup\limits_{x\,\in[-1,1]} |P(x)| \leqslant n \sup\limits_{\theta\,\in\mathbb{R}} |T(\theta)|$.

d) Montrer que : $\sup\limits_{\theta\,\in\mathbb{R}} |T'(\theta)| \leqslant n \sup\limits_{\theta\,\in\mathbb{R}} |T(\theta)|$.

II.C - Inégalité de Markov

Soit $P \in E_n$. Montrer que : $\sup\limits_{x\,\in[-1,1]} |P'(x)| \leqslant n^2 \sup\limits_{x\,\in[-1,1]} |P(x)|$.

(On pourra faire intervenir le polynôme trigonométrique $T(\theta) = P(\cos(\theta))$).

Partie III - Approximation polynomiale

Dans toute cette partie, on note $\mathcal{C}([-1,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs réelles. On le munit de la norme infinie : $\qquad \forall f \in \mathcal{C}([-1,1]), \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\,\in[-1,1]} |f(x)|$.

On note $\mathcal{C}^\infty([-1,1])$ le sous-espace de $\mathcal{C}([-1,1])$ constitué des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, V_n$ désigne l'ensemble des restrictions à $[-1,1]$ des éléments de E_n.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([-1,1])$, on pose $d(f, V_n) = \inf\limits_{p\,\in\,V_n} \|f - p\|_\infty$.

On dit qu'une suite $(\alpha_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ de nombres réels est à décroissance rapide si pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la suite $(n^k \alpha_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ est bornée. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites de nombres réels à décroissance rapide.

III.A - Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}$ et $j \in \mathbb{N}$.

III.A.1) Montrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} n^j \alpha_n$ est convergente.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}, R_n(j) = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{\infty} p^j \alpha_p$

III.A.2) Montrer que la suite $(R_n(j))_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.B - Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}$.

III.B.1) Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n F_n(x)$ est convergente.

Dans la suite de cette question III.B, on définit la fonction f sur le segment $[-1,1]$ par : $\forall x \in [-1,1], f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n F_n(x)$.

III.B.2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$.

III.B.3) Montrer que la suite $(d(f, V_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

Les notations suivantes seront valables jusqu'à la fin du sujet.

Pour une fonction $h \in \mathcal{C}([-1,1])$, on note $\widetilde{h}$ la fonction 2π-périodique suivante

$$\widetilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \theta \mapsto h(\cos(\theta)).$$

On rappelle que les coefficients de Fourier de $\widetilde{h}$ sont donnés par les formules suivantes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$: $a_0(\widetilde{h}) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{h}(t) dt$,

$a_n(\widetilde{h}) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{h}(t) \cos(nt) dt$, $b_n(\widetilde{h}) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{h}(t) \sin(nt) dt$.

III.C - Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([-1,1])$.

III.C.1) Montrer que la suite $(a_n(\widetilde{f}))_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide. Que vaut $b_n(\widetilde{f})$?

III.C.2) Montrer que la série de Fourier de $\widetilde{f}$ converge normalement vers $\widetilde{f}$.

III.C.3) Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ à décroissance rapide telle que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(f) F_n(x)$, pour tout $x \in [-1,1]$. Donner une expression de $\alpha_n(f)$ en fonction de f et de n.

III.D - Soit $f \in \mathcal{C}([-1,1])$. On suppose que la suite $(d(f, V_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.D.1) Montrer qu'on peut construire une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telle que : • pour tout entier n, $\deg(p_n) \leqslant n$.

•$(\|f - p_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.D.2) Le but de cette question est de montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que, pour $P \in E_{k-1}, a_k(\widetilde{f}) = a_k(\widetilde{f-P})$.
b) En déduire que la suite $(a_n(\widetilde{f})_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients de Fourier de la fonction $\widetilde{f}$ est à décroissance rapide.
c) Conclure.

Solution

Partie I

I.A -
I.A.1)
a) La fonction arcos étant définie sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,\pi]$ et la fonction cos étant définie sur $\mathbb{R}$, les fonctions F_n sont toutes définies sur $D=[-1,1]$.
b) $F_1(x)=x,\ F_2(x)=2x^2-1$ et $F_3(x)=4x^3-3x$.
c) $F_n(1)=\cos(0)=1,\ F_n(0)=\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^p & \text{si } n=2p\\ 0 & \text{si } n=2p+1\end{cases}$
$F_n(-1)=\cos(n\pi)=(-1)^n$.
c) Comme $\arccos(-x)+\arccos(x)=\pi$, on a
$\forall x\in D, F_n(-x)=\cos\big(n(\pi-\arccos(x)\big)=(-1)^nF_n(x)$.
Il s'ensuit que F_n et n ont même parité.
I.A.2) $\cos(a)+\cos(b)=2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ on a
$\forall x\in D, \forall n\in\mathbb{N}^\star, F_{n+1}(x)+F_{n-1}(x)=2xF_n(x)$
I.A.3) Par une récurrence immédiate on établit le résultat et le coefficient dominant de F_n qui est 2^{n-1} pour $n\geqslant 1$.
Remarque : nos lecteurs étudiants ne doivent sous aucun prétexte rédiger la question I.3) ainsi. Il faut rédiger le raisonnement par récurrence !!!!
I.A.4) En Maple, par exemple, on peut écrire la procédure suivante.

```
Tchebychev : = proc(n,X)
local i,T ;
T[0]:=1 ; T[1]:=X ;
for i from 2 to n do T[i]:= 2⋆X⋆T[i-1]-T[i-2] :
od ; RETURN (expand(T[n])) : end.
```

I.A.5) On obtient $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=-\dfrac{1}{4}$ à partir de I.A.2).
I.B -
I.B.1) En tant que fonction polynôme, F_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Comme, pour tout $x\in]-1,1[, \arccos'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, par composition de fonctions dérivables, $\forall x\in]-1,1[, F_n'(x)=\dfrac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}\sin\big(n\arccos(x)\big)$.

I.B.2)

a) Posons $\theta=\arccos(x)\in[0,\pi]$. On a $\cos(\theta)\underset{\theta\to 0}{=}1-\dfrac{\theta^2}{2}+o(\theta^2)$.

Donc $\theta^2 \underset{\theta\to 0}{\sim} 2(1-\cos(\theta)) \Rightarrow \theta \underset{\theta\to 0}{\sim} \sqrt{2(1-\cos(\theta)}$.

D'où $\arccos(x) \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

b) On en déduit que $F_n'(x)=\dfrac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}\sin\big(n\theta\big) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{n^2\theta}{\sqrt{2(1-x)}} \underset{x\to 1^-}{\sim} n^2$.

Comme F_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on a $F_n'(1)=n^2$.

D'après I.A.1.c), $F_n'(-1)=(-1)^{n-1}F_n'(1)=(-1)^{n-1}n^2$.

I.B.3) On déduit de I.B.1.a) que, pour tout $x\in -1,1[$,

$\dfrac{d}{dx}\Big(\sqrt{1-x^2}F_n'(x)\Big)=-\dfrac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}\cos\big(n\arccos(x)\big)=-n^2F_n'(x)$.

i.e. $\sqrt{1-x^2}F_n''(x)-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}F_n'(x)+n^2F_n(x)=0$.

Donc $\forall x\in]-1,1[,\ (1-x^2)F_n''(x)-xF_n'(x)+n^2F_n(x)=0$.

En multipliant les deux membres de l'égalité par 2^{1-n}, on obtient :

$\forall x\in]-1,1[,\ (1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0$.

Comme T_n est une fonction polynôme, cette égalité est vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$.

I.C -

I.C.1) La fonction $h : x\mapsto f(x)g(x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to -1^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}$

on a $h(x) \underset{x\to 1^-}{=} O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\Big)$ et $h(x) \underset{x\to -1^+}{=} O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\Big)$.

Les fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ et $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ étant intégrables sur $]-1,1[$ la fonction h est intégrable sur $]-1,1[$.

I.C.2) On a donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} h\in\mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégration, l'application $f\mapsto\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ est linéaire. Comme $f(x)g(x)=g(x)f(x)$, il s'ensuit que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Si $f\in E\setminus\{0\}, \varphi(f,f)=\displaystyle\int_{-1}^{1}(f(x))^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx>0$ car $x\mapsto\dfrac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est une fonction continue, positive, distincte de la fonction nulle sur $]-1,1[$.

On peut conclure que φ est un produit scalaire sur E.

I.C.3)

a) Procédons par récurrence. Si $n = 1, E_0 = \mathrm{Vect}(p_0)$ où $p_0(x) = 1$.

$p_1(x) = x$ et $\big(p_0|p_1\big) = 0$ car $x \mapsto \dfrac{p_0(x)p_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est impaire.

Si $n > 1$, supposons l'existence de $(p_0, \ldots, p_n)$ telle que, pour tout $k \leqslant n$, $p_k \perp E_{k-1}$ de coefficient dominant égal à 1 et $\deg(p_k) = k$.

Notons $f_{n+1}(x) = x^{n+1}$. On cherche p_{n+1} tel que $p_{n+1} \perp E_n$ de coefficient dominant égal à 1 et $\deg(p_{n+1}) = k$. Donc $p_{n+1} = f_{n+1} + q$, $q \in E_n$.

En tant que famille orthogonale de vecteurs non nuls, $(p_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre. Comme son cardinal est $n+1 = \dim(E_n)$, la famille $(p_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E_n. Il existe donc $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k p_k$.

Comme $p_{n+1} \perp E_n$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\big(p_{n+1}|p_k\big) = 0 = \big(f_{n+1}|p_k\big) + \lambda_k \big(p_k|p_k\big)$

Donc $p_{n+1} = f_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\big(f_{n+1}|p_k\big)}{\big(p_k|p_k\big)} p_k$. D'après le théorème de récurrence, on a existence et unicité de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) De la démonstration précédente, on déduit que $p_n = Q_n$.

I.C.4) $\big(T_m|T_n\big) = 2^{2-n-m} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\cos\big(n \arccos(x) \cos\big(m \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Le changement de variable $\theta = \arccos(x)$ établissant une bijection entre $[-1, 1]$ et $[0, \pi]$ et étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$, on a

$\big(T_m|T_n\big) = 2^{2-n-m} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$.

Comme $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, on a

$\big(T_m|T_n\big) = 2^{1-n-m} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos\big((m+n)\theta\big) + \cos\big((m-n)\theta\big) d\theta$

Comme, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(k\theta) d\theta = \pi \delta_{k,0}$, il vient :

Si $m \neq n$, $\big(T_m|T_n\big) = 0$ sinon $\big(T_n|T_n\big) = \begin{cases} \pi 2^{1-2n} & \text{si } n \neq 0 \\ 4\pi & \text{si } n = 0 \end{cases}$

On déduit de I.C.3) que $T_n = Q_n$.

Partie II

II.A -

II.A.1)

a) L'application $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right] \to \mathbb{R}, \theta \mapsto \sin(n\theta) - n \sin(\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

$f'(\theta) = n\big[\cos(n\theta) - \cos(\theta)\big]$ car la fonction cos est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $0 \leqslant \theta \leqslant n\theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ pour $n \geqslant 1$. La décroissance de f implique :

pour tout $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right]$, $f(\theta) \leqslant f(0) = 0$ *i.e.* le résultat.