Centrale/Supélec Transformée de Fourier et produit de convolution
Année 2012
Épreuve 1

Notations

On note :
$\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions bornées appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Pour toute fonction f de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

Pour toute fonction f de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt$.

Pour toute fonction f de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt}$.

On admet que ces expressions définissent des normes sur les espaces en question.

Soit f une fonction complexe d'une variable réelle. Par définition, le support de f est l'adhérence de l'ensemble $A_f = \{x\in\mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}\cdot$ On dit que f est à support compact si son support est un compact de $\mathbb{R}$; en d'autres termes, f est à support compact si et seulement s'il existe un réel $A > 0$ tel que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$.

Par définition, une approximation de l'unité est une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ f_n \text{ est positive sur } \mathbb{R}\,; \\ \forall n\in\mathbb{N}, \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n = 1\,; \\ \forall \varepsilon > 0,\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n = 0. \end{cases}$$

I Produit de convolution

Soit $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Lorsque la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose $$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt.$$

La fonction $f \star g$ est appelée produit de convolution de f par g.

I.A – Généralités

I.A.1) Dans chacun des deux cas suivants, montrer que $f \star g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ et donner une majoration de $f \star g$ pouvant faire intervenir $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

a) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$;

b) $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

I.A.2) Soient $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telles que $f \star g$ soit défini pour tout réel x. Montrer que $f \star g = g \star f$.

I.A.3) Montrer que si f et g sont à support compact, alors $f \star g$ est à support compact.

I.B – Produit de convolution de deux éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Pour toute fonction h de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ et tout réel α, on définit la fonction $T_\alpha(h)$ en posant $T_\alpha(h)(x) = h(x-\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans cette sous-partie I.B, on suppose que f et g appartiennent à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

I.B.1) Montrer qu'une fonction h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{\alpha \to 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0$.

I.B.2) Pour tout réel α, montrer que $T_\alpha(f \star g) = (T_\alpha(f)) \star g$.

I.B.3) Pour tout réel α, montrer que :
$$\|T_\alpha(f \star g) - f \star g\|_\infty \leqslant \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2.$$

I.B.4) En déduire que $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ dans le cas où f est à support compact.

I.B.5) Montrer que $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ dans le cas général.

I.C – Continuité, dérivabilité, séries de Fourier

I.C.1) On suppose que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $f \star g$ est continue.

b) Montrer que si g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.C.2) Soit k un entier naturel non nul. On suppose que g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses fonctions dérivées, jusqu'à l'ordre k, sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction dérivée d'ordre k.

I.C.3) Dans cette question I.C.3, on suppose que g est continue, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

a) Énoncer sans démonstration le théorème sur les séries de Fourier applicable aux fonctions continues, 2π-périodiques et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

b) Montrer que $f \star g$ est 2π-périodique et est somme de sa série de Fourier. Expliciter les coefficients de Fourier de $f \star g$ à l'aide des coefficients de Fourier de g et d'intégrales faisant intervenir f.

I.D* – *Approximation de l'unité

Soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et soit (δ_n) une suite de fonctions approximation de l'unité.

I.D.1) Montrer que la suite $(f \star \delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

I.D.2) Montrer que si f est à support compact, alors la suite $(f \star \delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

I.D.3) Pour tout entier naturel n, on note h_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $h_n(t) = \dfrac{(1-t^2)^n}{\lambda_n}$ et nulle en dehors de $[-1, 1]$, le réel λ_n étant donné par la formule $\lambda_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt$.

a) Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

b) Montrer que si f est une fonction continue à support inclus dans $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, alors $f \star h_n$ est une fonction polynomiale sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ et nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

c) En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass : toute fonction complexe continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

I.D.4) Existe-t-il une fonction $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction f de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on ait $f \star g = f$?

II Transformée de Fourier

Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction, notée $\widehat{f}$, définie par $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt$.

II.A – Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, montrer que $\widehat{f}$ appartient à $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

II.B – Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

II.B.1) On suppose que g est bornée.

a) Montrer que $f \star g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \star g$ en fonction de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ et $\displaystyle\int_{R} g$.

b) Montrer que $\widehat{f \star g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$.

II.B.2) Un contre-exemple. Montrer qu'il existe deux fonctions f et g dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $f \star g(0)$ ne soit pas défini.

II.C – Sinus cardinal

On définit, pour tout entier naturel non nul n, la fonction k_n par

$$k_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{n} & \text{si } |x| \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

II.C.1) Exprimer la transformée de Fourier $\widehat{k_n}(x)$ à l'aide de la fonction définie par : $\varphi(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

II.C.2) Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

On admet que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. On pose $K_n = \dfrac{1}{2\pi}\widehat{k_n}$.

II.C.3) Montrer que la suite de fonctions $(K_n)_{n \geqslant 1}$ est une approximation de l'unité.

II.D – Inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, on pose $I_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} k_n(x)\widehat{f}(-x)e^{-itx}dx$.

II.D.1) Pour tout réel t et tout entier $n \geqslant 1$, montrer que

$$I_n(t) = (f \star K_n)(t).$$

II.D.2) En déduire, pour tout réel t : $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)e^{itx}dx$.

III Convolution et codimension finie

Dans cette partie, on suppose que $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. On s'intéresse à la codimension dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ du sous-espace vectoriel $N_g = \{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \mid f \star g = 0\}$.

On note V_g l'espace vectoriel engendré par les fonctions $T_\alpha(g)$:

$$V_g = \text{Vect}\left(T_\alpha(g)\right)_{\alpha \in \mathbb{R}}$$

où, comme au I.B, on note $T_\alpha(g)$ est la fonction $x \mapsto g(x-\alpha)$.

III.A – À toute fonction g de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, on associe la forme linéaire φ_g sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_g(f) = \displaystyle\int_R f(t)g(-t)dt$.

Soit $(g_1, \ldots, g_p)$ une famille d'éléments de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

III.A.1) Montrer que la famille $(g_1, \ldots, g_p)$ est libre si et seulement si la famille $(\varphi_{g_1}, \ldots, \varphi_{g_p})$ est libre.

III.A.2) Soit E un espace vectoriel de dimension infinie et $(f_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ une famille de formes linéaires sur E. On note $K = \displaystyle\bigcap_{n\,\in\,\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(f_n)$. Montrer que la codimension de K dans E est égale au rang de la famille $(f_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ dans l'espace dual $E^\star$ (on commencera par le cas où ce rang est fini).

III.A.3) Montrer que la codimension de N_g dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est égale à la dimension de V_g.

III.A.4)

a) Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et soit g la fonction définie par $g(t) = e^{i\beta t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la codimension de N_g dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

b) Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe une fonction g de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telle que N_g soit de codimension n dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

III.B – ***Hypothèse A*** Soit $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. On dit que g vérifie l'hypothèse A si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, bornée et dont les fonctions dérivées à tout ordre sont bornées sur $\mathbb{R}$.

III.B.1) Montrer que, si N_g est de codimension finie dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et si g vérifie l'hypothèse A, alors g est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

III.B.2) En déduire l'ensemble des fonctions g vérifiant l'hypothèse A et telles que N_g soit de codimension finie dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

III.C – ***Cas général***

Soit $g \in \mathcal{C}_b(R)$. On suppose que N_g est de codimension finie n dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

III.C.1) Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et des fonctions $m_1, m_2, \ldots, m_n$ d'une variable réelle telles que, pour tout réel α,

$$T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g).$$

III.C.2) Soit F un sous-espace de dimension finie, notée p, de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et pour tout réel x, on note $e_x(f) = f(x)$.

a) Montrer qu'il existe des réels $a_1, \dots, a_p$ tels que $(e_{a_1}, \dots, e_{a_p})$ soit une base de l'espace dual $F^\star$.

b) Si $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille d'éléments de F, montrer que $\det(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ est non nul si et seulement si $(f_1, ..., f_p)$ est une base de F.

III.C.3) En appliquant la question III.C.2) à V_g, montrer que si g est de classe $\mathcal{C}^k$ alors les fonctions $m_1, ..., m_n$ sont de classe $\mathcal{C}^k$.

III.C.4) Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, $V_{h_r \star g}$ est de dimension finie (les fonctions h_r sont celles de la question I.D.3).

III.C.5) Montrer que pour r assez grand la dimension de $V_{h_r \star g}$ est égale à celle de V_g.

III.C.6) En déduire que les fonctions $m_1, ..., m_n$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

III.C.7) Déterminer l'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telles que N_g soit de codimension finie dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Solution

Partie I

I.A -

I.A.1)

a) Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, |f(t)g(x-t)| \leqslant \|g\|_\infty |f(t)|$.

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de $t \mapsto f(t)g(x-t)$. Il s'ensuit que $f \star g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |(f \star g)(x)| \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_1$.

Cette inégalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\|f \star g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$.
Remarque : nous avons corrigé l'énoncé qui ne rappelait la notation $\|\cdot\|_\infty$ que pour les continues et bornées. Sinon, il aurait fallu traiter tout de suite la question I.C.1).

b) Comme $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\|g\|_2^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(u)|^2 du = \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|^2 dt$ par changement de variable affine. La fonction $t \mapsto g(x,t)$ est donc élément de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Comme $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on déduit de l'inégalité $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 |ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2))$ appliquée à $(a,b) = (|f(t)|, |g(x-t)|)$, que la fonction $f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $f \star g$ est définie sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans l'espace préhilbertien $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire classique $(\varphi, \psi) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi}\, \psi$ donne : $|(f \star g)(x)| \leqslant \|f\|_2 . \|g\|_2$ compte tenu de la remarque précédente. Cette inégalité étant vraie pour tout x, on a $\|f \star g\|_\infty \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$.

I.A.2) Le changement de variable affine $x - t = u$ donne $f \star g = g \star f$.

I.A.3) Montrons que le support de $f\star g$ est contenu dans $\overline{A_f}+\overline{A_g}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. Si $x\notin\overline{A_f}+\overline{A_g}$, alors pour tout $t\in\mathbb{R}, f(t)g(x-t)=0$.
En effet, si $t\notin\overline{A_f}, f(t)=0$ et donc $f(t)g(x-t)=0$.
Si $t\in\overline{A_f}$, alors $x-t\notin\overline{A_g}$ de par le choix de x et donc $g(x-t)=0$. D'où le résultat. Comme $\overline{A_f}$ et $\overline{A_g}$ sont compacts, $\overline{A_f}\times\overline{A_g}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. L'application $u:(x,y)\mapsto x+y$ étant continue sur $\mathbb{R}^2$, $u(\overline{A_f}\times\overline{A_g})=\overline{A_f}+\overline{A_g}$ est un compact de $\mathbb{R}$.
Deuxième méthode : il suffit de montrer que si $f(t)=0$ pour $|t|\geqslant a$ et $g(t)=0$ pour $|t|\geqslant b$ alors $f(t)g(x-t)=0$ pour $|x|\geqslant a+b$.

I.B -

I.B.1) Si h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$,
$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^\star,\exists\eta\in\mathbb{R}_+^\star,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,|x-y|\leqslant\eta\Rightarrow|h(x)-h(y)|\leqslant\varepsilon$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, posons $y=x+\alpha$, alors $|\alpha|\leqslant\eta\Rightarrow|h(x)-h(x-\alpha)|\leqslant\varepsilon$.
Donc $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^\star,\exists\eta\in\mathbb{R}_+^\star,\forall\alpha\in\mathbb{R},|\alpha|\leqslant\eta\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},|h(x)-T_\alpha(h)(x)|\leqslant\varepsilon$.
Donc $\lim\limits_{\alpha\to0}\|T_\alpha(h)-h\|_\infty=0$.
Réciproquement, si $\lim\limits_{\alpha\to0}\|T_\alpha(h)-h\|_\infty=0$.
$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^\star,\exists\eta\in\mathbb{R}_+^\star,\forall\alpha\in\mathbb{R},|\alpha|\leqslant\eta\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},|h(x)-T_\alpha(h)(x)|\leqslant\varepsilon$.
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,y=x-\alpha$. Donc $|x-y|\leqslant\eta\Rightarrow|h(x)-h(y)|\leqslant\varepsilon$.
Donc h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) L'existence de $f\star g$ découle de I.A.1.).
$T_\alpha(f\star g)(x)=(f\star g)(x-\alpha)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(t)g(x-\alpha-t)dt=\int_R f(y-\alpha)g(x-y)dy$
par le changement de variable affine $\alpha+t=y$. D'où le résultat.

I.B.3) On déduit de I.B.2) que $T_\alpha(f\star g)-f\star g=T_\alpha(f)\star g-f\star g$ qui, par linéarité de l'intégration est égal à $\big(T_\alpha(f)-f\big)\star g$. De l'inégalité de I.A.1)b) on déduit que $\|T_\alpha(f\star g)-f\star g\|_\infty\leqslant\|T_\alpha(f)-g\|_2\times\|g\|_2$ car $T_\alpha(f)-f\in\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.

I.B.4) Si f est continue à support compact, soit $A>0$ tel que $f(t)=0$ si $|t|\geqslant A$. Alors $f(t-\alpha)=0$ si $t\notin[-A+\alpha,A+\alpha]$.
Donc $\|T_\alpha(f)-f\|_2^2=\displaystyle\int_{\alpha-A}^{\alpha+A}|f(t-\alpha)-f(t)|^2dt\leqslant2A\|T_\alpha(f)-f\|_\infty^2$ d'après l'inégalité de la moyenne. D'autre part, d'après le théorème de Heine, f étant continue sur le segment $[-A,A]$ y est uniformément continue, donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. D'après I.B.1), $\lim\limits_{\alpha\to0}\|T_\alpha(f)-f\|_\infty=0$. L'inégalité précédente et le théorème d'encadrement impliquent $\lim\limits_{\alpha\to0}\|T_\alpha(f)-f\|_2=0$. Avec I.B.3) et le théorème d'encadrement on a $\lim\limits_{\alpha\to0}\|T_\alpha(f\star g)-f\star g\|_\infty=0$. On conclut avec I.B.1).

I.B.5) Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions continues affine par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $\psi_n(x)=\begin{cases}1 & \text{si } |x|\leqslant n\\ 0 & \text{si } |x|\geqslant n+1\end{cases}$

Notons $g_n = g.\psi_n$. Comme g_n est continue à support compact, il suffit de prouver que la suite de fonctions $(f\star g_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $f\star g$ pour conclure d'après I.B.4).

$\forall x\in\mathbb{R}, (f\star g)(x)-(f\star g_n)(x)=\big(f\star\big((1-\psi_n)g\big)\big)(x)$.

Comme $f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $(1-\psi_n)g\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on déduit de I.A.1)b) que :

$\big\|f\star\big((1-\psi_n)g\big)\big\|_\infty \leqslant \|f\|_2\times\big\|(1-\psi_n)g\big\|_2$.

Comme $1-\psi_n$ est à valeurs dans $[0,1]$, on a : $\big\|\big((1-\psi_n)g\big\|_2^2\leqslant\displaystyle\int_{|t|\geqslant n}|g(t)|^2dt$.

g^2 étant intégrable sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{|t|\geqslant n}|g(t)|^2dt\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Par encadrement $\big\|\big((1-\psi_n)g\big\|_2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Il s'ensuit que $(f\star g_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f\star g$. D'où la conclusion souhaitée.

I.C -

I.C.1)

a) Comme $g\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$, il en est de même de $x\mapsto f(t)g(x-t)$ quel que soit $t\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2, |f(t)g(x-t)|\leqslant\|g\|_\infty|f(t)|$.

La fonction $t\mapsto\|g\|_\infty|f(t)|$ étant indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}$, il découle du théorème de continuité des intégrales paramétrées que $f\star g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, (f\star g)(x)-(f\star g)(y)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(t)\big(g(x-t)-g(y-t)\big)dt.$

Comme g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,

$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, |a-b|\leqslant\alpha\Rightarrow|g(a)-g(b)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{1+\|f\|_1}.$

En prenant $a=x-t, b=y-t$, on a $|a-b|=|x-y|$. Donc

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow\big|(f\star g)(x)-(f\star g)(y)\big|\leqslant\dfrac{\varepsilon\|f\|_1}{1+\|f\|_1}\leqslant\varepsilon$

D'où $f\star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.C.2) Pour tout $x\in\mathbb{R}, t\mapsto f(t)g(x-t)$ est élément de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ d'après I.A.1).

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto f(t)g(x-t)$ est élément de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

et $\forall j\in[\![1,k]\!], \dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\big(f(t)g(x-t)\big)=f(t)g^{(j)}(x-t)$

Par hypothèse, les $g^{(j)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. Donc

$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2, \left|\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\big(f(t)g(x-t)\big)\right|\leqslant\|g^{(j)}\|_\infty|f(t)|.$

Comme $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ les fonctions $t\mapsto\|g^{(j)}\|_\infty|f(t)|$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

On déduit du théorème de dérivation des intégrales paramétrées et d'une récurrence que $f\star g\in\mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $(f\star g)^{(k)}=f\star g^{(k)}$.

I.C.3)

a) Le théorème demandé est le théorème de convergence normale.