Centrale/Supélec Matrices positives
Année 2016 (im)primitives
Épreuve 1

Ce problème étudie diverses propriétés des matrices primitives et des matrices irréductibles, définies dans les parties III et V respectivement, et s'appuie sur la notion de chemin dans une matrice positive, que l'on définit dans le préambule.

Généralités

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tous entiers naturels i et j, avec $i \leqslant j$, la notation $[\![i,j]\!]$ désigne $\{k \in \mathbb{N}, i \leqslant k \leqslant j\}$·

- On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si A est dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on notera $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$ le coefficient de A situé en ligne i et colonne j.

- On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux successifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Si A est une matrice carrée de terme général $a_{i,j}$, on note $a_{i,j}^{(m)}$ le terme général de la matrice A^m.

- Soit A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A.
On appelle *rayon spectral* de A la quantité $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$·
On dit qu'une valeur propre λ de A est *dominante* si :
$$\forall \mu \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{\lambda\}, |\mu| < |\lambda|.$$

- On identifie une matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé. Cela permet de légitimer les notations $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$.

- On note A^{T} la transposée d'une matrice A.
- On identifie un élément $x = (x_i)$ de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice-colonne associée, ce qui légitime la notation Ax pour tout A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Dans ces conditions x^{T} désigne la matrice-ligne associée au vecteur x.

- Dans la partie IV, on munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, défini par $\big(x|y\big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^{\mathrm{T}} y$.

Matrices positives

- On dit que $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est *positive* et on note $A \geqslant 0$ si $\forall (i,j), a_{i,j} \geqslant 0$.

On dit que A est *strictement positive* et on note $A > 0$, si $\forall (i,j), a_{i,j} > 0$.

Ces définitions s'appliquent aux vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ (notations $x \geqslant 0$ ou $x > 0$).

On prendra bien garde au fait que l'implication
$(A \geqslant 0 \text{ et } A \neq 0) \Rightarrow A > 0$ est fausse !

- Il est clair (et on ne demande pas de le démontrer) que les puissances A^k (avec $k \geqslant 1$) d'une matrice carrée positive (respectivement strictement positive) sont positives (respectivement strictement positives).

Chemins dans une matrice positive

- Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice positive de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Un *chemin* dans A est une suite $\mathcal{C} = (i_k)_{0 \leqslant k \leqslant m}$ de $[\![1, n]\!]$, avec $m \geqslant 1$, telle que : $\forall k \in [\![0, m[\![, a_{i_k, i_{k+1}} > 0$. Un tel chemin sera noté :

$$i_0 \to \cdots \to i_k \to \cdots \to i_m.$$

On dit que $\mathcal{C}$ a pour *longueur* m et qu'il va de i_0 (son origine) à i_m (son extrémité) en passant par les i_k.

- On dit que $\mathcal{C}$ est un *chemin élémentaire* si $i_0, \ldots, i_m$ sont distincts deux à deux.

- On dit que $\mathcal{C}$ est un *circuit* si $i_0 = i_m$ et un *circuit élémentaire* si de plus $i_0, \ldots, i_{m-1}$ sont distincts. Dans un circuit, la notion d'origine et d'extrémité perd de son intérêt. On pourra donc dire d'un circuit qu'il passe par un indice i (sans se préoccuper de la position de i dans ce circuit).

I Si $\rho(A) < 1$, alors $\lim\limits_{m \to \infty} A^m = 0$

Cette partie est pratiquement indépendante du reste du problème. Elle démontre un résultat qui ne sera utilisé que dans la question IV.B.
On dit qu'une norme $A \mapsto \|A\|$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est sous-multiplicative si

$$\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|.$$

***I.A** – Deux exemples de normes sous-multiplicatives*

Pour toute matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N(A) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.

I.A.1) Montrer que l'application $A \mapsto N(A)$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

I.A.2) Soit $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A \mapsto \|A\| = N(Q^{-1}AQ)$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

I.B – Une conséquence de l'inégalité $\rho(A) < 1$

On se donne A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, avec $\rho(A) < 1$. On veut montrer que $\lim\limits_{m\to+\infty} A^m = 0$.

I.B.1) Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure, telles que $A = PTP^{-1}$. On se donne $\delta > 0$. On pose $\Delta = \mathrm{Diag}(1, \delta, \ldots, \delta^{n-1})$ et $\widehat{T} = \Delta^{-1}T\Delta$. Montrer que T est triangulaire supérieure et qu'on peut choisir δ de sorte que $N\big(\widehat{T}\big) < 1$.

I.B.2) Avec ce choix de δ, on pose $Q = P\Delta$ et on munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $M \mapsto \|M\| = N\big(Q^{-1}MQ\big)$.

Montrer que $\|A\| < 1$ et en déduire $\lim\limits_{m\to+\infty} A^m = 0$.

II Chemins dans les matrices positives

Cette partie aborde les notions de base sur les chemins dans une matrice positive A (et notamment le lien entre l'existence de tels chemins et le caractère strictement positif de coefficients des puissances de A). Une bonne compréhension des résultats démontrés ici est importante dans la perspective des parties III et IV. Dans cette partie, A désigne une matrice positive de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

II.A – Réduction d'un chemin à un chemin élémentaire

Montrer que s'il existe dans A un chemin de i vers j, avec $i \neq j$ alors il existe un chemin élémentaire de i vers j et de longueur $\ell \leqslant n-1$. De même, montrer que s'il existe dans A un circuit passant i, alors il existe un circuit élémentaire passant par i et de longueur $\ell \leqslant n$.

II.B – Une caractérisation de l'existence d'un chemin de i ***à*** j

Soit $A \geqslant 0$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit i, j dans $[\![1, n]\!]$. Soit $m \geqslant 1$. Montrer l'équivalence des propositions :

- il existe dans A un chemin d'origine i, d'extrémité j, de longueur m ;
- le coefficient d'indice i, j de A^m (noté $a_{i,j}^{(m)}$) est strictement positif.

On pourra procéder par récurrence sur l'entier $m \geqslant 1$.

II.C – Chemins dans une puissance de A

Soit i, j dans $[\![1, n]\!]$, et soit ℓ et m dans $\mathbb{N}^\star$. Montrer l'équivalence des propositions :

- il existe dans A^m un chemin d'origine i d'extrémité j, de longueur ℓ;
- il existe dans A un chemin d'origine i, d'extrémité j, de longueur $m\ell$.

III Matrices primitives et indice de primitivité

Soit A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \geqslant 0$. On dit que A est *primitive* s'il existe $m \geqslant 1$ tel que $A^m > 0$. Avec cette définition, il est clair que toute matrice carrée strictement positive est primitive.
Dans toute la suite, *matrice primitive* signifie *matrice carrée positive primitive.* Si A est primitive, on appelle *indice de primitivité* de A le plus petit entier $m \geqslant 1$ tel que $A^m > 0$.

III.A – Chemins élémentaires dans une matrice primitive

Soit A une matrice primitive de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tous $i \neq j$ existe dans A un chemin élémentaire de i à j et de longueur $\ell \leqslant n-1$, et que pour tout i il existe dans A un circuit élémentaire passant par i et de longueur $\ell \leqslant n$.

III.B – Puissances d'une matrice primitive

III.B.1) Donner un exemple simple d'une matrice carrée primitive mais non strictement positive.

III.B.2) Soit $B > 0$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$. Montrer que $Bx > 0$.

III.B.3) Soit A une matrice primitive et $m \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^m > 0$. Montrer que $\forall p \geqslant m, A^p > 0$. On pourra remarquer, en le justifiant, qu'aucune des colonnes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de A n'est nulle.

III.B.4) Prouver que si A est primitive, alors A^k est primitive pour tout $k \geqslant 1$.

III.B.5) Montrer que le rayon spectral d'une matrice primitive est strictement positif.

III.C – La matrice de Weilandt

On définit la matrice $W_n = (w_{i,j})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$w_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i < n \text{ et } j = i+1 \\ 1 & \text{si } i = n \text{ et } j \in \{1,2\} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

Par exemple, pour $n = 5, W_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le but de cette question est de prouver que W_n est primitive, d'indice de primitivité $n^2 - 2n + 2$.

III.C.1) Montrer que le polynôme caractéristique de W_n est $X^n - X - 1$.

En déduire $W_n^{n^2-2n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} W_n^k$, puis que

$$W_n^{n^2-2n+2} = I_n + W_n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-2} W_n^k$$

III.C.2) Préciser le plus court circuit passant par l'indice 1 dans la matrice W_n. En déduire que la matrice positive $W_n^{n^2-2n+1}$ n'est pas strictement positive.

III.C.3) Montrer que pour tous i, j de $[\![1, n]\!]$, avec $i \neq j$, il existe dans W_n au moins un chemin d'origine i, d'extrémité j, et de longueur inférieure ou égale à $n-1$.

On pourra traiter successivement les deux cas $1 \in \{i, j\}$ et $1 \notin \{i, j\}$.
En déduire que la matrice $W_n^{n^2-2n+2}$ est strictement positive et conclure.

III.D – Indice de primitivité maximum

Le but de cette sous-partie est de prouver que si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive, on a toujours $A^{n^2-2n+2} > 0$, c'est-à-dire que l'indice de primitivité de A est inférieur ou égal à n^2-2n+2. Ce majorant est en fait un maximum, comme on l'a vu avec la matrice W_n de Weilandt dans la question précédente.
Dans toute cette sous-partie, A est une matrice primitive donnée dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On peut donc appliquer à la matrice A les résultats de la question III.A. En particulier, on note $\ell \in [\![1, n]\!]$ la plus petite longueur d'un circuit élémentaire de A.

III.D.1) Par l'absurde, on suppose $\ell = n$. Montrer qu'alors tous les circuits de A sont de longueur multiple de n. En déduire que les matrices A^{kn+1} (avec $k \in \mathbb{N}$) sont de diagonale nulle et aboutir à une contradiction.

III.D.2) D'après ce qui précède, il existe dans A un circuit élémentaire $\mathcal{C}$ de longueur $\ell \leqslant n-1$.
Pour simplifier la rédaction, et parce que cela n'enlève rien à la généralité du problème, on suppose qu'il s'agit du circuit $1 \to 2 \to \cdots \to \ell \to 1$ (les $n-\ell$ indices restants $\ell+1, \ell+2, \ldots n$ étant donc situés « en dehors » du circuit $\mathcal{C}$). Nous allons montrer que $A^{n+\ell(n-2)}$ est strictement positive.
Pour cela, on se donne i et j dans $[\![1, n]\!]$. Tout revient à établir qu'il existe dans A un chemin d'origine i, d'extrémité j et de longueur $n + \ell(n-2)$.

a) Montrer que dans A, on peut former un chemin d'origine i, de longueur $n-\ell$, et dont l'extrémité est dans $\{1, 2, \ldots, \ell\}$ (on notera k cette extrémité).
On pourra traiter le cas $1 \leqslant i \leqslant \ell$, puis le cas $\ell+1 \leqslant i \leqslant n$.

b) Dire pour quelle raison les ℓ premiers coefficients diagonaux de A^ℓ (et en particulier le k-ième) sont strictement positifs. Montrer alors qu'il existe un chemin de longueur $n-1$ dans A^ℓ (c'est-à-dire un chemin de longueur $\ell(n-1)$ dans A) d'origine k et d'extrémité j.

c) En déduire finalement $A^{n+\ell(n-2)} > 0$, puis $A^{n^2-2n+2} > 0$.

IV Étude des puissances d'une matrice primitive

Cette partie utilise uniquement la définition des matrices primitives : elle est pratiquement indépendante de la partie III. Par ailleurs, les résultats de la partie IV ne seront pas réutilisés dans les parties V et VI. Pour toute matrice primitive A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on admet le résultat suivant :

Le rayon spectral $\rho(A)$ de A (dont on sait qu'il est strictement positif) est une valeur propre dominante de A et le sous-espace propre associé est une droite vectorielle qui possède un vecteur directeur $x > 0$.

Dans toute cette partie, on se donne une matrice primitive A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Pour simplifier les notations, on note r (plutôt que $\rho(A)$) le rayon spectral de A. On rappelle que $r > 0$. Il est clair que A^{T} est primitive, et que A et A^{T} ont le même rayon spectral r. On peut donc noter x(respectivement y) un vecteur directeur strictement positif de la droite $D = \mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}} - rI_n)$ (respectivement de la droite $\Delta = \mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}} - rI_n)$. On note $H = \mathrm{Im}(A - rI_n)$ Quitte à multiplier y par un coefficient strictement positif adéquat, on suppose $\big(y|x\big) = y^{\mathrm{T}}x = 1$. On note $L = xy^{\mathrm{T}}$(c'est un élément de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$).

IV.A – Puissances de la matrice $B = A - rI_n$

IV.A.1) Montrer que H est l'hyperplan orthogonal à la droite Δ (c'est-à-dire $H = \Delta^\perp$).

IV.A.2) Prouver que L est la matrice, dans la base canonique, de la projection de $\mathbb{R}^n$ sur la droite D, parallèlement à l'hyperplan H.

IV.A.3) Vérifier que L est de rang 1, qu'elle est strictement positive, et que $L^{\mathrm{T}}y = y$.

IV.A.4) Montrer que $AL = LA = rL$. En déduire :
$$\forall m \in \mathbb{N}^\star, (A - rL)^m = A^m - r^m L.$$

IV.B – La matrice $B = A - rL$ vérifie $\rho(B) < r$

Dans cette question, on pose $B = A - rL$. On va montrer que $\rho(B) < r$ et en déduire un résultat intéressant sur la suite des puissances successives de A. Soit λ une valeur propre non nulle de B et soit z un vecteur propre associé.

IV.B.1) Montrer que $Lz = 0$, puis $Az = \lambda z$. En déduire $\rho(B) \leqslant r$.

IV.B.2) Par l'absurde, on suppose $\rho(B) = r$. On peut donc choisir λ de telle sorte que $|\lambda| = r$. Montrer qu'alors $\lambda = r$ puis $Lz = z$ et aboutir à une contradiction. Conclure.

IV.B.3) Déduire de ce qui précède (et de la sous-partie IV.A) que

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\frac{1}{r}A\right)^m = L.$$

IV.C – Le rayon spectral de A est une valeur propre simple

Dans cette sous-partie, on montre que la valeur propre dominante de A (c'est-à-dire son rayon spectral r) est simple (on sait déjà que le sous-espace propre associé est une droite vectorielle). Soit μ la multiplicité de r comme valeur propre de A et soit $T = PAP^{-1}$ une réduite triangulaire de A. En examinant la diagonale de $\left(\frac{1}{r}T\right)^m$ quand $m \to +\infty$, montrer que $\mu = 1$.

V Matrices carrées positives irréductibles

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A \geqslant 0$. On dit que A est *irréductible* si, pour tous i et j dans$[\![1, n]\!]$, il existe $m \geqslant 0$ (dépendant a priori de i et j) tel que $a_{i,j}^{(m)} > 0$.

Avec cette définition, il est clair que toute matrice primitive est irréductible. Dans toute la suite, matrice irréductible signifie matrice carrée positive irréductible. Dans toute cette partie, A est une matrice positive donnée dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

V.A – Premières propriétés des matrices irréductibles

V.A.1) Exprimer l'irréductibilité de A en termes de chemins dans A.

V.A.2) Montrer que si A est irréductible, alors pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, il existe $m \in [\![0, n-1]\!]$ dépendant a priori de i et j tel que $a_{i,j}^{(m)} > 0$.

V.A.3) Donner un exemple simple de matrice carrée irréductible mais non primitive.

V.A.4) Montrer que si A n'est pas irréductible, alors A^2 n'est pas irréductible.

En revanche, donner un exemple simple d'une matrice A irréductible telle que A^2 ne soit pas irréductible.

V.A.5) Montrer que le rayon spectral d'une matrice irréductible est strictement positif.

V.B – Deux caractérisations de l'irréductibilité et une condition nécessaire

V.B.1) Pour la matrice positive A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- la matrice A est irréductible ;
- la matrice $B = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ est strictement positive ;
- la matrice $C = (I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive.

V.B.2) Soit A irréductible. Montrer qu'aucune ligne (aucune colonne) de A n'est identiquement nulle.

V.C – Deux conditions suffisantes de primitivité

Dans cette question, A est une matrice irréductible donnée.

V.C.1) On suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!], a_{i,i} > 0$. Montrer que $A^{n-1} > 0$ (donc A est primitive). On raisonnera en termes de chemins dans A.

V.C.2) On suppose que : $\exists i \in [\![1, n]\!], a_{i,i} > 0$. Montrer que A est primitive. Pour tous j et k dans $[\![1, n]\!]$, on pourra montrer qu'il existe dans A un chemin de j à k et passant par i, et considérer le maximum m des longueurs des chemins ainsi obtenus. On prouvera que $A^m > 0$.

VI Le coefficient d'imprimitivité

Soit $A = (a_{i,j})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \geqslant 0$. On dit que A est *imprimitive* si A est irréductible mais n'est pas primitive.

Pour toute matrice A imprimitive dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on admet le résultat suivant

Les valeurs propres λ de A telles que $|\lambda| = \rho(A)$ sont simples. Ce sont les solutions de l'équation $\lambda^p = \rho(A)^p$ pour un certain entier $p \geqslant 2$. En particulier $\rho(A)$ est valeur propre simple de A. Plus généralement, la totalité du spectre de A est invariante dans la multiplication par $\omega = \exp\big(2i\pi/p\big)$. Par ailleurs, et pour la valeur propre $\rho(A)$ la matrice A possède un vecteur propre $x > 0$.

L'indice $p \geqslant 2$ dont il est question dans le résultat précédent est appelé le coefficient d'imprimitivité de A.

Remarque : si on rapproche ce qui précède et le résultat admis au début de la partie IV, on peut fort bien dire qu'une matrice primitive a pour coefficient d'imprimitivité $p = 1$.

VI.A – Diagonales des puissances d'une matrice imprimitive

Soit A une matrice imprimitive de coefficient d'imprimitivité $p \geqslant 2$. Pour tout entier m non multiple de p, montrer que la diagonale de A^m est identiquement nulle. On pourra s'intéresser à la trace de A^m.

En déduire que le résultat de la question IV.B.3 ne tient plus si A est imprimitive.