**Centrale/Supélec** Aplatissement d'un ensemble de points en grande dimension
**Année 2018**
**Épreuve 1**

• Dans tout le problème $N, k$ et $d$ désignent des entiers supérieurs ou égaux à deux.

• Pour tous entiers naturels non nuls $p$ et $q$, on note $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à $p$ lignes et $q$ colonnes.

• On note $A^{\mathrm{T}}$ la transposée d'une matrice $A$.

• Pour tous entiers naturels $p$ et $q$, avec $p \leqslant q$, la notation $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p \leqslant i \leqslant q\}\cdot$

• Dans tout le problème on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur $\Omega$.

• Pour tout événement $A$ de probabilité non nulle, et pour tout événement $B$, on note $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B|A))$ la probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$.

• Étant donnée une variable aléatoire $Z$ à valeurs réelles, on note $\mathbb{E}(Z)$ son espérance.

• On dit qu'une variable aléatoire $Z$ est une variable de Rademacher lorsque $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(Z = 1) = \dfrac{1}{2}\cdot$

• De façon générale, si $E$ est un espace euclidien, son produit scalaire et sa norme seront respectivement notés $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$. Ces notations seront utilisées notamment pour $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$, munis de leurs structures euclidiennes canoniques.

**Problématique**

On s'intéresse à la question suivante : étant donnés $N$ points dans un espace euclidien de grande dimension, est-il possible de les envoyer linéairement dans un espace de petite dimension sans trop modifier les distances entre ces points ?

Pour préciser cette question, considérons $N$ vecteurs distincts $v_1, \ldots, v_N$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout réel $\varepsilon$ tel que $0 < \varepsilon < 1$, on dit qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ est une $\varepsilon$-isométrie pour $v_1, \ldots, v_N$ lorsque :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, (1 - \varepsilon)\|v_i - v_j\| \leqslant \|f(v_i) - f(v_j)\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|v_i - v_j\|.$$

La question peut se reformuler ainsi :

**Objectif**

Pour quelles valeurs de $k$ existe-t-il $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ qui soit une $\varepsilon$-isométrie pour $v_1, \ldots, v_N$ ?

On se propose d'établir le théorème suivant, démontré par William B. Johnson et Joram Lindenstrauss en 1984 :

Il existe une constante absolue $c$ strictement positive telle que : quels que soient $N$ et $d$, entier naturels supérieurs ou égaux à 2 et quels que soient $v_1, \ldots, v_N$ distincts dans $\mathbb{R}^d$, il suffit que $k \geqslant c\dfrac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$ pour qu'il existe une $\varepsilon$-isométrie $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ pour $v_1, \ldots, v_N$.

Les seules méthodes connues à ce jour pour démontrer ce théorème sont de nature probabiliste. Dans la partie **I**, on établit des résultats préliminaires portant sur la convexité et les probabilités. La partie **II** est consacrée à la démonstration d'une inégalité de concentration, qui est utilisée dans la partie **III** où le théorème de Johnson-Lindenstrauss est démontré.

## I Préliminaires

### *I.A – Projection sur un convexe fermé*

Soit $E$ un espace euclidien.

**Q1.** Soient $a$ et $b$ dans $E$. Montrer la relation suivante et en donner une interprétation géométrique : $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\big(\|a\|^2 + \|b\|^2\big)$.

**Q2.** En déduire que si $u, v$ et $v'$ dans $E$ vérifient $v \neq v'$ et $\|u-v\| = \|u-v'\|$ alors $\left\|u - \dfrac{v+v'}{2}\right\| < \|u-v\|$.

**Q3.** Soient $F$ un fermé non vide de $E$ et $u$ dans $E$. Montrer qu'il existe $v$ dans $F$ tel que : $\forall w \in F, \|u-v\| \leqslant \|u-w\|$.

**Q4.** En déduire que si $C$ est un convexe fermé non vide de $E$ et $u$ est un vecteur de $E$ alors il existe un unique $v$ dans $C$ tel que :

$$\forall w \in F, \|u-v\| \leqslant \|u-w\|.$$

On dira que $v$ est le projeté de $u$ sur $C$ et on notera $d(u,C) = \|u-v\|$.

### *I.B – Inégalité de Hölder pour l'espérance*

Soient $p$ et $q$ deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

**Q5.** Montrer que, pour tous réels positifs $a$ et $b$, $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}\cdot$

*On pourra utiliser la concavité du logarithme.*

**Q6.** En déduire que si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \mathbb{E}\big(|X|^p\big)^{1/p}\mathbb{E}\big(|Y|^q\big)^{1/q}$.

*On pourra d'abord montrer ce résultat lorsque* $\mathbb{E}\big(|X|^p\big) = \mathbb{E}\big(|Y|^q\big) = 1$.

***I.C – Espérance conditionnelle***

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à valeurs réelles. Pour tout événement $A \subset \Omega$ de probabilité non nulle, l'espérance conditionnelle de $X$ sachant $A$, notée $\mathbb{E}(X|A)$, est par définition le réel

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_A(X = x).x.$$

En d'autres termes, $\mathbb{E}(X|A))$ est l'espérance de $X$ dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$. Les propriétés usuelles de linéarité et de positivité de l'espérance, qu'on ne demande pas de redémontrer, sont ainsi valables pour l'espérance conditionnelle sachant $A$.

**Q7.** Soit $(A_1, \dots, A_m)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(X|A_i)$.

***I.D – Variables aléatoires à queue sous-gaussienne***

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs $a$ et $b$ tels que, pour tout réel positif $t$, $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant a\exp(-bt^2)$.

**Q8.** Montrer que $\mathbb{E}(X^2) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)dt$.

On pourra noter $X^2(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ où $0 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_n$.

**Q9.** Montrer que le moment d'ordre deux de $X$ est inférieur ou égal à $\dfrac{a}{b}$.

Soit $\delta$ un réel tel que $0 \leqslant |\delta| \leqslant \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

**Q10.** Justifier que, pour tout réel $t, \mathbb{P}, (|X| + \delta| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant t - |\delta|)$.

**Q11.** Montrer que, pour tout réel $t, -b(t - |\delta|)^2 \leqslant a - \dfrac{1}{2}bt^2$.

**Q12.** En déduire que pour tout réel $t$ tel que $t \geqslant |\delta|$ on a

$$\mathbb{P}\big(|X + \delta| \geqslant t\big) \leqslant a\exp(a)\exp\Big(-\frac{1}{2}bt^2\Big)\cdot$$

**Q13.** Justifier que l'inégalité précédente reste valable si $0 \leqslant t < |\delta|$.

## II L'inégalité de concentration de Talagrand

Soit $E$ un espace euclidien de dimension égale à $n \geqslant 1$ muni d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n : \Omega \to \{-1, 1\}$ des variables aléatoires de Rademacher indépendantes dans leur ensemble.

On pose $X = \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n e_n$.

L'objectif de cette partie est de montrer, pour tout convexe fermé non vide $C$ de $E$, $\qquad \mathbb{P}(X \in C).\mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{1}{8}d(X,C)^2\Big)\Big) \leqslant 1 \qquad$ (II.1).

**Q14.** Traiter le cas où $C$ est un convexe fermé de $E$ ne rencontrant pas $X(\Omega)$.

***II.A – Étude de deux cas particuliers***

On suppose, dans la suite de cette sous-partie II.A uniquement, que $C$ est un convexe fermé de $E$ qui rencontre $X(\Omega)$ en un seul vecteur $u$.

**Q15.** Montrer que $\frac{1}{4}d(X,u)^2$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $1/2$.

**Q16.** En déduire l'espérance de $\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)$ et montrer qu'elle est inférieure ou égale à $2^n$.

**Q17.** Justifier que $d(X,C) \leqslant d(X,u)$ et en déduire l'inégalité (II.1) dans ce cas.

***II.B – Initialisation***

On suppose désormais que $C$ est un convexe fermé de $E$ tel que $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments. Quitte à permuter les vecteurs de la base, on peut supposer que ces deux vecteurs diffèrent par leur dernière coordonnée.

On se propose de démontrer l'inégalité (II.1) par récurrence sur la dimension $n$ de $E$.

**Q18.** Traiter le cas $n = 1$.

***II.C – Propriétés de $C_{+1}$ et $C_{-1}$***

Soit $n$ un entier tel que $n \geqslant 2$. On suppose à présent que (II.1) est vérifiée au rang $n-1$. On note $E' = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$ et $\pi$ la projection orthogonale sur $E'$. $\qquad \pi : E \to E', \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$

On pose $X' = \pi \circ X = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$. C'est une variable aléatoire à valeurs dans $E'$. Pour $t$ dans $\{-1,1\}$ on note $H_t$ l'hyperplan affine $E' + te_n$ ; $C_t = \pi(C \cap H_t)$.

**Q19.** Montrer, pour $x' \in E'$ et $t \in \{-1,1\}$, que $x' \in C_t \iff x' + te_n \in C$.

**Q20.** Montrer que $C_{+1}$ et $C_{-1}$ sont des convexes fermés non vides de $E'$.

Pour $t$ dans $\{-1,1\}$, on note $Y_t$ le projeté de $X'$ sur le convexe fermé non vide $C$ . C'est une variable aléatoire à valeurs dans $E'$.

**Q21.** Montrer que $\mathbb{P}(X \in C) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{+1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{-1})$.

***II.D – Une inégalité cruciale***

Soit $\lambda$ un réel tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

**Q22.** Montrer que $d(X,C) \leqslant \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n}+\varepsilon_n e_n)+\lambda(Y_{-\varepsilon_n}-\varepsilon_n e_n)-X\|$.

**Q23.** En déduire que

$$d(X,C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X'\|^2$$

puis que $d(X,C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)\|Y_{\varepsilon_n} - X'\|^2 + \lambda\|Y_{-\varepsilon_n} - X'\|^2$.

Ainsi, on a montré l'inégalité

$$d(X,C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)d(X', C_{\varepsilon_n})^2 + \lambda d(X', C_{-\varepsilon_n})^2.$$

***II.E – Espérances conditionnelles***

On note $p_+ = \mathbb{P}(X' \in C_{+1})$ et $p_- = \mathbb{P}(X' \in C_{-1})$

On va supposer, sans perte de généralité, que $p_+ \geqslant p_-$

**Q24.** Montrer que $p_- > 0$.

**Q25.** Montrer que pour tout $\lambda$ dans $[0,1]$,

$$\mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{1}{8}d(X,C)^2\Big)\Big|\varepsilon_n = -1\Big)$$
$$\leqslant \exp\Big(\frac{\lambda^2}{2}\Big)\mathbb{E}\Big(\Big(\exp\Big(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\Big)\Big)^{1-\lambda}\Big(\exp\Big(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\Big)\Big)^{\lambda}\Big)$$

**Q26.** En déduire que

$$\mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{1}{8}d(X,C)^2\Big)\Big|\varepsilon_n = -1\Big)$$
$$\leqslant \exp\Big(\frac{\lambda^2}{2}\Big)\Big[\mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\Big)\Big)\Big]^{1-\lambda}\Big[\mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\Big)\Big)\Big]^{\lambda}$$

**Q27.** À l'aide de l'hypothèse de récurrence, justifier que

$$\mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{1}{8}d(X,C)^2\Big)\Big|\varepsilon_n = 1\Big) \leqslant \frac{1}{p_+}\cdot$$

**Q28.** Déduire de ce qui précède que pour tout $\lambda$ dans $[0,1]$,

$$\mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{1}{8}d(X,C)^2\Big)\Big) \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p_+} + \exp\Big(\frac{\lambda^2}{2}\Big)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}}\cdot\frac{1}{(p_+)^{\lambda}}\Big)\cdot$$

***II.F – Optimisation***

**Q29.** On pose $\lambda = 1 - \dfrac{p_-}{p_+}\cdot$ Montrer que

$$\mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{1}{8}d(X,C)^2\Big)\Big) \leqslant \frac{1}{2p_+}\Big(1 + \exp\Big(\frac{\lambda^2}{2}(1-\lambda)^{\lambda-1}\Big)\cdot$$

**Q30.** Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{x^2}{2} + (x-1)\ln(1-x) \leqslant \ln(2+x) - \ln(2-x).$$

*On pourra faire une étude de fonction.*

**Q31.** En déduire que pour tout $x \in [0,1[$,

$$1 + \exp\Big(\frac{x^2}{2}\Big)(1-x)^{x-1} \leqslant \frac{4}{2-x}\cdot$$

**Q32.** Terminer la démonstration de l'inégalité (II.1).

### *II.G – Inégalité de Talagrand*

**Q33.** En déduire l'inégalité de Talagrand :

Pour tout $C$ convexe fermé non vide de $E$ et pour tout réel $t$ strictement positif, $\quad \mathbb{P}(X \in C).\mathbb{P}\Big(d(X,C) \geqslant t\Big) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{t^2}{8}\Big)\cdot$

## III Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

Dans cette partie on considère l'espace $E = \mathfrak{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par : $\forall (A,B) \in E^2, \big(A|B\big) = \operatorname{tr}\big(A^{\mathrm{T}}B\big)$.
On notera $\|\cdot\|_F$ la norme euclidienne associée.
On rappelle que $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$ sont munis de leurs normes euclidiennes canoniques, notées indistinctement $\|\cdot\|$. On identifie $\mathbb{R}^d$ à $\mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, de sorte qu'un vecteur quelconque $x = (x_1, \ldots, x_d)$ de $\mathbb{R}^d$ peut être identifié à la matrice colonne $(x_1 \ldots x_d)^{\mathrm{T}}$.

On fixe un vecteur $(u_1, \ldots, u_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, identifié comme ci-dessus à la matrice colonne $(u_1 \ldots u_d)^{\mathrm{T}}$ de $\mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ et tel que $\|u\| = 1$.

On définit l'application $g : \mathfrak{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, M \mapsto \|M.u\|$.

Soit $X = (\varepsilon_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant d}}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathfrak{M}_{k,d}(\mathbb{R})$, dont les coefficients $\varepsilon_{i,j}$ sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes dans leur ensemble.

### *III.A – Une inégalité de concentration*

**Q34.** Montrer que $C = \{M \in \mathfrak{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \,|\, g(M) \leqslant r\}$ est une partie convexe et fermée de $\mathfrak{M}_{k,d}(\mathbb{R})$.

**Q35.** Montrer que pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_{k,d}(\mathbb{R})$, $\|M.u\| \leqslant \|M\|_F$.

Soient $r$ et $s$ deux réels, avec $t > 0$.

**Q36.** Montrer que pour toute matrice $M$ dans $\mathfrak{M}_{k,d}(\mathbb{R})$,

$$d(M,C) < t \Rightarrow g(M) < r + t.$$

**Q37.** En déduire que $\mathbb{P}\big(g(X) \leqslant r\big).\mathbb{P}\big(g(X) \geqslant r + t\big) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{t^2}{8}\Big)\cdot$

### *III.B – Médianes*

On dit qu'un réel $m$ est une médiane de $g(X)$ lorsque

$$\mathbb{P}\big(g(X) \geqslant m\big) \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}\Big(g(X) \leqslant m\big)\Big) \geqslant \frac{1}{2}\cdot$$

**Q38.** Justifier que $g(X)$ admet au moins une médiane.
*On pourra considérer la fonction $G$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel $t, G(t) = \mathbb{P}\big(g(X) \leqslant t\big)$, et examiner l'ensemble $G^{-1}\big([1/2, 1]\big)$.*

**Q39.** Déduire de ce qui précède que, pour tout nombre réel strictement positif $t$,

$$\mathbb{P}\Big(|g(X)-m|\geqslant t\Big)\leqslant 4\exp\Big(-\frac{1}{8}t^2\Big)$$

où $m$ est une médiane de $g(X)$.

**Q40.** En déduire que $\mathbb{E}\Big(\big(g(X)-m\big)^2\Big)\leqslant 32$.

**Q41.** Montrer que $\mathbb{E}\big(g(X)^2\big)=k$, et en déduire que $\mathbb{E}(g(X))\leqslant\sqrt{k}$.

**Q42.** En déduire que $(\sqrt{k}-m)^2\leqslant\mathbb{E}\big((g(X)-m)^2\big)$.

***III.C – Un lemme-clé***

**Q43.** Montrer que, pour tout réel strictement positif $t$

$$\mathbb{P}\Big(\big|g(X)-\sqrt{k}\,\big|\geqslant t\Big)\leqslant 4\exp(4)\exp\Big(-\frac{1}{16}t^2\Big)\cdot$$

On pose $A_k=\dfrac{X}{\sqrt{k}}\cdot$ Soient $\varepsilon$ dans $]0,1[$ et $\delta$ dans $]0,1/2[$.

On suppose que $k\geqslant 160\dfrac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}\cdot$

**Q44.** Montrer que, pour tout vecteur unitaire $u$ dans $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathbb{P}\Big(\big|\|A_k.u\|-1\big|>\varepsilon\Big)<\delta.$$

***III.D – Conclusion***

On conserve les notations et les hypothèses précédentes.
Soient $v_1,\dots,v_N$ des vecteurs distincts dans $\mathbb{R}^d$.
Pour tout $(i,j)\in[\![1,N]\!]^2$ tel que $i<j$ on note $E_{i,j}$ l'événement :

$$(1-\varepsilon)\|v_i-v_j\|\leqslant\|A_k.v_i-A_k.v_j\|\leqslant(1+\varepsilon)\|v_i-v_j\|.$$

**Q45.** Montrer que $\mathbb{P}\big(\overline{E_{i,j}}\big)<\delta$ où $\overline{E_{i,j}}$ désigne l'événement contraire de $E_{i,j}$.

**Q46.** En déduire que $\mathbb{P}\Big(\displaystyle\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N}E_{i,j}\Big)\geqslant 1-\frac{N(N-1)}{2}\delta.$

**Q47.** En déduire le théorème de Johnson et Lindenstrauss.

## *Solution*

### Partie I

**Q1.** $\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2+2\big(a|b\big)$ et $\|a-b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2-2\big(a|b\big)$.
Par addition membres à membres de ces des égalités, on obtient le résultat appelé l'identité du parallélogramme qui s'interprète comme : la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés

des côtés de ce parallélogramme.

**Q2.** Appliquons Q1. avec $a = \dfrac{u-v}{2}$ et $b = \dfrac{u-v'}{2}\cdot$ Il vient :
$\left\|u - \dfrac{v+v'}{2}\right\|^2 + \dfrac{1}{4}\|v'-v\|^2 = \|u-v\|^2$. Donc $\left\|u - \dfrac{v+v'}{2}\right\| < \|u-v\|$ car $v \neq v'$ et $\|\cdot\| \geqslant 0$.

**Q3.** Si, pour tout $v \in F$ il existe $w \in F$ tel que $\|u-v\| > \|u-w\|$, alors $\forall v \in F, \|u-v\| > d(u,F)$ ce qui contredit la définition de $d(u,F)$.

Donc : $\exists v \in F, \forall w \in F, \|u-v\| \leqslant \|u-w\|$.

**Q4.** L'existence découle de Q3. S'il existe $v, v' \in C$ et $v \neq v'$, la convexité de $C$ implique $\dfrac{v+v'}{2} \in C$. D'après Q2. on a $\left\|u - \dfrac{v+v'}{2}\right\| < \|u-v\|$.

D'après Q3. on a $\left\|u - \dfrac{v+v'}{2}\right\| \geqslant \|u-v\|$ ce qui est contradictoire. D'où $v = v'$.

***I.B -***

**Q5.** Si $a$ ou $b$ est nul, l'inégalité est vérifiée. Sinon, par concavité de la fonction ln, on a : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2, \ln\left(\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}\right) \geqslant \dfrac{1}{p}\ln(a^p) + \dfrac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab)$.

Par croissance de la fonction exp, le résultat s'ensuit.

**Q6.** • Supposons, dans un premier temps $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}(|Y|^q) = 1$.
L'espace probabilisé étant fini, $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_n\}\cdot$
Notons classiquement $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$,

$$p_{i,.} = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \text{ et } p_{.,j} = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}.$$

D'après la formule de transfert, $\mathbb{E}(|XY|) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}|x_i y_j|$.

D'après Q5. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, |x_i y_j| \leqslant \dfrac{|x_i|^p}{p} + \dfrac{|y_j|^q}{q}$

Comme $p_{i,j} \geqslant 0$, on a $\forall j \in [\![1,n]\!], \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}|x_i y_j| \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\frac{|x_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\frac{|y_j|^q}{q}\cdot$

Donc $\forall j \in [\![1,n]\!], \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}|x_i y_j| \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\frac{|x_i|^p}{p} + p_{.,j}\frac{|y_j|^q}{q}\cdot$

Par addition des inégalités membres à membres,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}|x_i y_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\frac{|x_i|^p}{p} + \sum_{j=1}^{n} p_{.,j}\frac{|y_j|^q}{q} = \sum_{i=1}^{n} p_{i,.}\frac{|x_i|^p}{p} + \sum_{j=1}^{n} p_{.,j}\frac{|y_j|^q}{q}$$

*i.e.* $\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \dfrac{1}{p}\mathbb{E}(|X|^p) + \dfrac{1}{q}\mathbb{E}(|Y|^q) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

• Si $E(|X|^p = 0$ ou $\mathbb{E}(|Y|^q) = 0$, l'égalité est une égalité.

• Sinon, posons $X' = \dfrac{X}{(\mathbb{E}(|X|^p))^{1/p}}$ et $Y' = \dfrac{Y}{(\mathbb{E}(|Y|^q))^{1/q}}\cdot$ Par linéarité de $\mathbb{E}$,