On utilise la fonction Gamma d'Euler Γ(partie I) pour calculer, en partie II, une intégrale dépendant d'un paramètre. En partie III, en liaison avec des variables aléatoires suivant une loi de Poisson, on détermine l'équivalent, quand $n \to +\infty$, de sommes dépendant d'un paramètre entier n. Les trois parties sont largement indépendantes.

I Autour de la fonction Gamma d'Euler

Pour $\mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

I.A –

I.A.1) Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction Γ ?

I.A.2) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$. En déduire, pour tout $x \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, une expression de $\Gamma(x+n)$ en fonction de x, n et $\Gamma(x)$ ainsi que la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

I.A.3) Montrer l'existence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^4}dt$ et les exprimer à l'aide de Γ.

I.B –

I.B.1) Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a, b], t^x \leqslant \max(t^a, t^b) \leqslant t^a + t^b$.

I.B.2) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathcal{D}$. Exprimer $\Gamma^{(k)}(x)$, dérivée k-iéme de Γ au point x, sous forme d'une intégrale.

I.C –

I.C.1) Montrer que Γ' s'annule en un unique réel ξ dont on déterminera la partie entière.

I.C.2) En déduire les variations de Γ sur $\mathcal{D}$. Préciser en particulier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$. Préciser également les limites de Γ' en 0 et en $+\infty$. Esquisser le graphe de Γ.

II Une transformée de Fourier

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-3/4} e^{itx} dt$, i où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

II.A – Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto F(x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Soit k un entier naturel non nul et soit x un réel. Donner une expression intégrale de $F^{(k)}(x)$ dérivée k-iéme de F en x. Préciser $F(0)$.

II.B –

II.B.1) Montrer qu'au voisinage de $x = 0$, la fonction F peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(ix)^n}{n!} \qquad (S)$$

où c_n est la valeur de Gamma en un point à préciser. On exprimera c_n en fonction de n et de c_0.

Quel est le rayon de convergence de la série entière qui apparaît au second membre de (S) ?

II.B.2) On admet que $\Gamma(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, x^{(x-1/2)} e^{-x}$.

Étudier si la série du second membre de (S) converge absolument lorsque $|x| = R$.

II.B.3) Soit $R(x)$ la partie réelle et $I(x)$ la partie imaginaire de $F(x)$.

Déterminer, au voisinage de 0, le développement limité de $R(x)$ à l'ordre 3 et de $I(x)$ à l'ordre 4.

II.C –

II.C.1) Prouver que F vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle de la forme $F' + AF = 0$, où A est une fonction à préciser.

II.C.2) En déduire une expression de $F(x)$.

On pourra commencer par dériver la fonction

$x \mapsto \dfrac{1}{8}\ln(1 + x^2) + \dfrac{i}{4}\arctan(x)$.

III Autour de la loi de Poisson

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramétre λ si, pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}, \mathbb{P}(X \in A)$ désigne la probabilité de l'événement $X^{-1}(A)$. On note $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k$ (série génératrice de la variable aléatoire X).

III.A* – *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

III.A.1) Déterminer $G_X(t)$

III.A.2) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathbb{V}(X)$ et l'écart type de X.

III.A.3) Soit μ un réel strictement positif. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$ et telle que X et Y soient indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

III.B – Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On rappelle que, quels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ et les intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_k$ de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\big(X_{i_1} \in I_1, X_{i_2} \in I_2, \ldots, X_{i_k} \in I_k\big) = \prod_{j=1}^{j=k} \mathbb{P}(X_{i_j} \in I_j).$$

III.B.1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, déterminer la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

III.B.2) Déterminer l'espérance et l'écart type des variables aléatoires S_n et $T_n = \dfrac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\cdot$

III.B.3) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c(\varepsilon)$ tel que, si $c \geqslant c(\varepsilon)$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\mathbb{P}(|T_n| \geqslant c) \leqslant \varepsilon$.

III.C –

Dans cette sous-partie, on fixe deux réels a et b tels que $a < b$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $a + \sqrt{n\lambda} > 0$, on pose

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} \mid n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leqslant k \leqslant n\lambda + b\sqrt{n\lambda}\}\cdot$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $x_{k,n} = \dfrac{k - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\cdot$ On considère enfin la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

III.C.1) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que f soit une fonction M-lipschitzienne.

III.C.2) a) Montrer que, si $x, h \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, alors

$$\left| hf(x) - \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leqslant M\frac{h^2}{2}\cdot$$

b) En déduire, lorsque I_n est non vide, une majoration de

$$\Big|\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\,\in\,I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)dt\Big|$$

où p est le plus petit élément de I_n et q est le plus grand.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\,\in\,I_n} f(x_{k,n}) = \int_a^b f(x)dx$.

III.C.3) Pour $k\in I_n$, on note $y_{k,n} = \Big(1-\dfrac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda}\Big)^k \exp\big(x_{k,n}\sqrt{n\lambda}\big)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer l'existence d'un entier $N(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$ et tout $k\in I_n$, les inégalités suivantes soient satisfaites :

a) $\dfrac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}y_{k,n} \leqslant e^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!} \leqslant \dfrac{1+\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}y_{k,n}$

On utilisera la formule de Stirling $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n$.

b) $(1-\varepsilon)f(x_{k,n}) \leqslant y_{k,n} \leqslant (1+\varepsilon)f(x_{n,k})$.

III.C.4) Exprimer, sous forme d'intégrale, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\,\in\,I_n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}$.

III.C.5) Comparer $\mathbb{P}(a \leqslant T_n \leqslant b)$ et $\displaystyle\sum_{k\,\in\,I_n}\mathbb{P}(S_n = k)$ où S_n et T_n sont définies en III.B.

III.C.6) Déterminer les limites, quand $n \to +\infty$, de

$$\mathbb{P}(T_n \geqslant a),\ \mathbb{P}(T_n = a),\ \mathbb{P}(T_n > a)\ \text{ et }\ \mathbb{P}(T_n \leqslant b).$$

III.D –

III.D.1) Déduire de la question III.C.6) la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

III.D.2) Déterminer un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de

$$A_n = \sum_{k=0}^{[n\lambda]}\frac{(n\lambda)^k}{k!}\ \text{ et }\ B_n = \sum_{[n\lambda]}^{+\infty}\frac{(n\lambda)^k}{k!}$$

où $[t]$ désigne la partie entiére du réel t.

On interprétera $e^{-n\lambda}A_n$ comme la probabilité d'un événement lié à S_n et donc à T_n.

III.D.3) Pour $\lambda \neq 1$, on note $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}$ et $D_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(n\lambda)^k}{k!}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n\lambda}C_n$ si $\lambda < 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n\lambda}D_n$ si $\lambda > 1$.

III.E – On suppose $\lambda < 1$.

III.E.1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big((n\lambda)^{-n}\displaystyle\int_0^{n\lambda}(n\lambda-t)^n e^t dt\Big)$.

III.E.2) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, en déduire un équivalent de D_n lorsque $n \to +\infty$.

III.F – Si $\lambda > 1$, déterminer un équivalent de C_n lorsque $n \to +\infty$.
Considérer l'intégrale $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}(r-t)^n e^t dt$ et choisir convenablement le réel r.

Solution

Partie I

I.A -

I.A.1) Notons $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}, t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^{-2})$ par croissances comparées. Donc $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ quel que soit $x\in\mathbb{R}$.
$f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}\cdot$ On déduit des intégrales de Riemann que $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, $x>0$.
On conclut que $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$ si, et seulement si, $x>0$.
Comme $f \geqslant 0$, on peut conclure que $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^\star$.

I.A.2) Les fonctions $t\mapsto e^{-t}$ et $t\mapsto t^x$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, par intégration par parties, si $0<a<b$, $\displaystyle\int_a^b e^{-t}t^x dt = \Big[-t^x e^{-t}\Big]_a^b + x\int_a^b e^{-t}t^{x-1}dt$.
$\lim\limits_{b\to+\infty} t^b e^{-b} = 0 = \lim\limits_{a\to 0^+} e^{-a}t^a$. Comme $x>0$ $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ existent, donc $\forall x\in\mathbb{R}_+^\star, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^\star, \forall x\in\mathbb{R}_+^\star, \Gamma(x+n) = (x+n-1)\dots x\Gamma(x)$.
Comme $\Gamma(1)=1$, on en déduit que : $\forall n\geqslant 1, \Gamma(n) = (n-1)!$

I.A.3) Les fonctions $t\mapsto e^{-t^2}$ et $t\mapsto e^{-t^4}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et négligeables devant $t\mapsto t^{-2}$ au voisinage de $+\infty$ par croissances comparées. Donc les deux intégrales existent.
Le changement de variable $t=\sqrt{u}$ dans la première est bijectif entre $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_+^\star$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\cdot$
Le changement de variable $t = u^{1/4}$ dans la seconde est bijectif entre $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_+^\star$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^4}dt = \frac{1}{4}\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big) = \Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big)\cdot$

***I.B* -**
Le Donc, pour tout $\forall t \in \mathbb{R}_+^\star, \forall x \in [a,b], t^x \leqslant \max(t^a, t^b)$.

I.B.2) f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ par théorèmes généraux.
$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2, \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = e^{-t}\ln^k(t) t^{x-1}$.
Donc $\forall x \in [a,b], \forall t \in \mathbb{R}_+^\star, \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}|\ln^k(t)|(t^{a-1}+t^{b-1}) = \varphi_k(t)$.
$\varphi_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}_+)$ et, par croissances comparées, $\varphi_k(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^{-2})$.
Comme $0 < \dfrac{a}{2} < a < b, \varphi_k(t) \underset{t\to 0^+}{=} (t^{\frac{a}{2}-1})$ par croissances comparées.
Donc, φ_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On déduit d'un théorème du cours sur la classe des intégrales paramétrées, que $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \forall k \in \mathbb{N}^\star, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln^k(t) t^{x-1}dt$$

***I.C* -**
I.C.1) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Comme Γ est continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$, le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\xi) = 0$. La partie entière de ξ est 1. La fonction $t \mapsto e^{-t}\ln^2(t)t^{x-1}$ étant continue et strictement positive sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$, $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln^2(t)t^{x-1}dt > 0$.
Il s'ensuit que Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Il existe donc un unique $\xi \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $\Gamma'(\xi) = 0$.

I.C.2) Il en découle que $\Gamma'(x) < 0$ si $x \in]0,1[$ et $\Gamma'(x) > 0$ si $x \in]1,+\infty[$. La fonction Γ décroît sur $]0,1]$ et croît sur $[1,+\infty[$.
Comme Γ est continue en 1 et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\Gamma(x) = \Gamma(1) = 1$.
Donc $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}\cdot$ Il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{0^+}\Gamma = +\infty$.
$x \geqslant [x] > 2 \Rightarrow \Gamma(x) \geqslant \Gamma([x]) = ([x]-1)! \Rightarrow \displaystyle\lim_{+\infty}\Gamma = +\infty$.
Γ étant dérivable sur $\mathcal{D}$, on déduit de $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, par dérivation
$\Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x)$. Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\Gamma'(x+1) = \Gamma'(1) \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\Gamma(x) = 1$,
$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2\Gamma'(x) = -1$, donc $\Gamma'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{-1}{x^2}\cdot$ Il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{0^+}\Gamma' = -\infty$.
Si $x > 2, \Gamma(x) > 0 \Rightarrow \Gamma'(x+1) \geqslant x\Gamma'(x) \geqslant x\Gamma'(2)$ car Γ' est croissante sur $\mathcal{D}$.
Donc $\displaystyle\lim_{+\infty}\Gamma' = +\infty$. Le graphe de Γ est aisé et laissé au lecteur.

Partie II

***II.A* -** Notons $g(x,t) = e^{-t}t^{-3/4}e^{itx}$. La fonction g est de clase $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$ par théorèmes généraux et $|g(x,t)| = f\left(\dfrac{1}{4}, t\right)$. On déduit de I.A. que la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^\star \forall k \in \mathbb{N}^\star, \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = e^{-t}t^{-3/4}(it)^k.$

$\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = e^{-t}t^{-3/4}t^k = f\Big(k+\dfrac{1}{4}, t\Big) = \psi_k(t).$

D'après I.A), , ψ_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On déduit d'un théorème du cours sur la classe des intégrales paramétrées, que $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{C})$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^\star, F^{(k)}(x) = i^k \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{k-\frac{3}{4}}e^{itx}.$

$F(0) = \Gamma\Big(\dfrac{1}{4}\Big)\cdot$

II.B -

II.B.1) $g(x,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$ où $x \in \mathbb{R}$ est fixé et $g_n(t) = e^{-t}t^{-3/4}\dfrac{(itx)^n}{n!}\cdot$

$\sum g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^\star$ de somme $t \mapsto g(x,t)$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star, g_n(t) = \dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)$. Donc g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} |g_n| = \frac{|x|^n}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-\frac{3}{4}}dt = \frac{|x|^n}{n!}\Gamma\Big(n+\frac{1}{4}\Big)\cdot$

D'après I.A.2), $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g_n| = \frac{|x|^n}{n!}\Big(n-\frac{3}{4}\Big)\cdots\frac{1}{4}\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big) = \lambda_n.$

Pour $x \neq 0, \lambda_n > 0$ et $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = |x|\dfrac{n+1/4}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$

Si $|x| < 1$, la série $\sum \lambda_n$ converge d'après la règle de d'Alembert. On déduit alors du théorème de sommation $\mathcal{L}^1$ que si $|x| < 1, F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(ix)^n}{n!}$

où $c_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-\frac{3}{4}}dt = \Gamma\Big(n+\frac{1}{4}\Big) = c_0\prod_{k=1}^{n}\Big(k-\frac{3}{4}\Big)\cdot$

On déduit du calcul précédent que $R = 1$.

II.B.2) Avec la formule de Stirling, on peut écrire :

$\dfrac{|c_n|}{n!} \underset{n\to\infty}{\sim} \Big(\dfrac{n+1/4}{n}\Big)^{n-\frac{1}{2}}e^{-1/4}\Big(n+\dfrac{1}{4}\Big)^{1/4} = \mu_n.$

$\mu_n \underset{n\to\infty}{=} \exp\Big(n-\dfrac{1}{2}\Big)\ln\Big(1+\dfrac{1}{4}\Big)e^{-1/4}\Big(n+\dfrac{1}{4}\Big)^{1/4} \underset{n\to\infty}{\sim} n^{1/4}.$

Donc la série $\displaystyle\sum \frac{|c_n|}{n!}|x|^n$ diverge pour $|x| = 1$.

II.B.3) Comme F est développable en série entière au voisinage de 0, elle a un développement limité de tout ordre en 0.

$F(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + ic_1x - c_2\dfrac{x^2}{2} - ic_3\dfrac{x^3}{6} + c_4\dfrac{x^4}{24} + o(x^4).$

D'où $R(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 - c_2\dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ et $I(x) \underset{x\to 0}{=} c_1x - c_3\dfrac{x^3}{6} + o(x^4).$

II.C -

II.C.1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, F'(x) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{1/4}e^{itx}dt$. Effectuons une intégration par parties en posant $u(t) = t^{1/4}$ et $v(t) = -\dfrac{e^{-t(1-ix)}}{1-ix}\cdot$ Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $u'(t) = \dfrac{1}{4}t^{-3/4}$ et $v'(t) = e^{-t(1-ix)}$.

$u(0)v(0) = 0$ et $|u(t)v(t)| = \dfrac{e^{-t}}{|1-ix|} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Donc $F'(x) = \dfrac{i}{4(1-ix)}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t(1-ix)}t^{-3/4}dt = -A(x)F(x)$

où $A(x) = \dfrac{-i}{4(1-ix)} = \dfrac{-i(1+ix)}{4(1+x^2)} = \dfrac{x}{4(x^2+1} - i\dfrac{1}{4(x^2+1)}\cdot$

II.C.2) Soit $\theta : x \mapsto \dfrac{1}{8}\ln(1+x^2) - \dfrac{i}{4}\arctan(x)$. Alors $\theta' = A$. Donc

$F(x) = F(0)e^{-\theta(x)} = \dfrac{\Gamma(1/4)}{(1+x^2)^{1/8}}\exp\Big(i\dfrac{\arctan(x)}{4}\Big)$.

Partie III

III.A -

III.A.1) Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ comme la série $\sum \dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$ converge et a pour somme $e^{\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, t^X a une espérance finie et

$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)t^k = \sum_{k=0}^{?} e^{-\lambda}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{\lambda(t-1)}$.

III.A.2) Il s'ensuit que $G_X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. D'où $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$.
$G''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}\infty \Rightarrow G''(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$.
Donc $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda$.

III.A.3) Comme X et Y sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\end{aligned}$$

d'après le binôme de Newton. Donc $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

III.B -

III.B.1) Par récurrence à partir de III.A.3) on montre que $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$. D'après III.A.2), $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{V}(S_n) = n\lambda$.

III.B.2) T_n est donc centrée réduite, donc $\mathbb{E}(T_n) = 0$ et $\mathbb{V}(T_n) = 1$.

III.B.3) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $c > 0$,
$\mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant c) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(T_n)}{c^2}\cdot$ Comme $\displaystyle\lim_{c\to+\infty} c^2 = +\infty$. Donc
$\forall \varepsilon > 0, \exists c(\varepsilon) > 0, \forall c > c(\varepsilon) \Rightarrow \mathbb{P}(|T_n| \geqslant c) \leqslant \varepsilon$.