L'objet de ce problème est l'étude de certaines fonctions définies sur des espaces de matrices. Dans tout le problème, on fixe un entier $d \in \mathbb{N}^\star$ et on note $\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$) l'espace des matrices carrées à coefficients réels (respectivement complexes) de taille $d \times d$. Si i et j sont deux entiers entre 1 et d, on note $A_{i,j}$ le coefficient placé ligne i et colonne j dans la matrice A. On rappelle que $A^0 = I_d$. On note $\mathrm{tr}(A))$ la trace de la matrice A.

Les parties I, II et III sont indépendantes des parties IV et V.

I Une norme utile sur $\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$

I.A **-** Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ l'application $A \mapsto P(A)$ est une fonction continue de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$.

I.B **-** Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tA \times B)$ est un produit scalaire sur l'espace $\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$. Dans toute la suite du problème, on note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

I.C **-** Pour tous entiers i, j entre 1 et d et toute matrice $A \in \mathfrak{M}_d(R)$, comparer $|A_{i,j}|$ et $\|A\|$.

I.D **-** Montrer que : $\forall (A, B) \in \left(\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})\right)^2, \|A \times B\| \leqslant \|A\|.\|B\|$.

I.E **-** Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$, comparer $\|A^n\|$ et $\|A\|^n$.

II Séries entières de matrices

Dans cette partie, on se donne une série entière à coefficients complexes $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R strictement positif, éventuellement égal à $+\infty$.

II.A **-** Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R}) \mid \|A\| < R\}\cdot$ Montrer que l'application $\varphi : A \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ est définie et continue sur $\mathcal{B}$.

II.B **-** Soit $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que$\|A\| < R$.

II.B.1) Établir l'existence d'un entier $r \in \mathbb{N}^\star$ tel que la famille $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$ soit libre et la famille $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ soit liée.

II.B.2) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence et l'unicité d'un r-uplet $(\lambda_{0,n}, \ldots, \lambda_{r-1,n})$ dans $\mathbb{R}^r$ tel que : $A^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k$.

II.B.3) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leqslant C \|A^n\|.$$

II.B.4) En déduire que, pour tout entier k entre 0 et $(r-1)$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n \lambda_{k,n}$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$.

II.B.5) Conclure qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(A) = P(A)$ et $\deg(P) < r$.

II.B.6) Déterminer ce polynôme P lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $a_n = \dfrac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

***II.C* - I.** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ pour qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R}), \varphi(A) = P(A).$$

III Deux applications

III.A - Première application : une formule de trigonométrie matricielle

III.A.1) Rappeler l'énoncé du théorème permettant de faire le produit de deux séries de nombres complexes. On admet dans la suite de la partie III que le résultat valable pour les séries de nombres complexes est encore valable pour des séries de matrices dans $\mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$.

III.A.2) Pour $(A, B) \in (\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})^2$ tel que A et B commutent, montrer que $\exp(iA)\exp(iB) = \exp(i(A+B))$.

III.A.3) Pour tout $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$, on pose

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Montrer que $\cos^2(A) + \sin^2(A) = I_d$.

III.B - Seconde application : le théorème de Cayley-Hamilton

On fixe une matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$.
III.B.1) Pour R assez grand, montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $(Re^{i\theta} I_d - A)$ est inversible dans $\mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$, et que son inverse est la matrice

$$(Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n.$$

III.B.2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout R assez grand, la matrice $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} d\theta$ vaut A^{n-1}.
III.B.3) On considère le polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_d) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

Montrer que, pour R assez grand,

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta}) \chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} d\theta.$$

III.B.4) En déduire que $\chi_A(A)$ est la matrice nulle.
On pourra faire intervenir des comatrices.

IV Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $M \in \mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$ et $f :]-\infty, M[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x,y) \in \left] -\infty, \frac{M}{2} \right[^2, 2f(x+y) = f(2x) + f(2y). \qquad (IV.1)$$

***IV.A* -** Soit α un nombre strictement inférieur à $\dfrac{M}{2}$ et F la primitive de f s'annulant en α. Montrer que pour tous x et y dans $\left] -\infty, \dfrac{M}{2} \right[$ avec $y \neq \alpha$, on a :

$$f(2x) = 2\frac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y - \alpha}.$$

IV.B - En déduire que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, M[$.
IV.C - Montrer que $f'' = 0$, puis que l'ensemble des solutions continues de l'équation (IV.1) forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont on déterminera une base.

V Étude d'une autre fonction matricielle

Dans cette partie, on se donne une fonction $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on définit une fonction $f_\xi : \mathfrak{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R}),\, f_\xi(A) = (\xi(A_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant d}.$$

On se propose de déterminer les fonctions continues $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R}),\ A \text{ inversible} \Rightarrow f_\xi(A) \text{ inversible} \qquad \text{(V.1)}$$

V.A **-** Déterminer les fonctions continues vérifiant la condition (V.1) lorsque $d = 1$.

On se place dorénavant dans le cas $d \geqslant 2$.

On se donne une fonction continue ξ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (V.1).

V.B **-** Montrer : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, ad - bc \neq 0 \Rightarrow \xi(a)\xi(d) \neq \xi(b)\xi(c)$.

On pourra considérer la matrice : $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & d & 0 & \dots & 0 \\ c & d & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{d-2} & \\ c & d & & & \end{pmatrix}$

V.C **-** En déduire que la fonction ξ est injective, puis qu'elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

V.D **-** Montrer que la fonction ξ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\star$.

V.E **-** Le but de cette question est de montrer $\xi(0) = 0$.

V.E.1) Montrer que si $\xi(0) \neq 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\xi(0)\xi(2) = \xi(1)\xi(\alpha).$$

V.E.2) Conclure.

V.F **-** Soit $\eta = \xi^{-1} : I \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de la bijection $\xi : \mathbb{R} \to I$. Montrer que là où cela est défini $\big(\eta(xy)\big)^2 = \eta(x^2)\eta(y^2)$.

V.G **-** On suppose dans cette question que la fonction η prend des valeurs strictement positives sur $I \cap]0, +\infty[$.

V.G.1) Montrer que la fonction $f = \ln \circ \eta \exp$ vérifie l'équation (IV.1) sur un intervalle $]-\infty, M[$, avec M (éventuellement infini) à préciser en fonction de l'intervalle I.

V.G.2) En déduire que sur l'intervalle $I \cap]0, +\infty[$ la fonction η est de la forme : $\eta : x \mapsto K_1 x^{\alpha_1}$ avec deux constantes $K_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$.

V.G.3) Montrer que sur l'intervalle $I \cap]-\infty, 0[$ la fonction η est de la forme : $\eta : x \mapsto K_2(-x)^{\alpha_2}$ avec deux constantes $K_2 < 0$ et $\alpha_2 > 0$.

V.G.4) Montrer que $I = \mathbb{R}$ puis que la fonction η est une fonction impaire. avec deux constantes $K_2 < 0$ et $\alpha_2 > 0$.

***V.H* -** En déduire dans le cas général que, si $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant la condition (V.1), alors elle est impaire et sa restriction à $\mathbb{R}_+^\star$ est de la forme $x \mapsto Cx^\beta$ avec $C \neq 0$ et $\beta > 0$.

***V.I* -** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de la matrice $A_\lambda \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1 hors de la diagonale et que des λ sur la diagonale.

***V.J* -** En déduire toutes les fonctions continues $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (V.1).

Solution

Partie I

***I.A* -** $f_P : A \mapsto P(A)$ est continue sur $\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ car c'est une fonction à coordonnées polynomiales en les coefficients de A.

***I.B* -** $\mathrm{tr}({}^t\!A.B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} ({}^t\!A.B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} A_{k,i}\ B_{k,i}$, il s'agit donc du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^{d^2}$.

***I.C* -** $\|A\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{d}\sum_{\ell=1}^{d} A_{k,\ell}^2 \geqslant A_{i,j}^2$. Donc $|A_{i,j}| \leqslant \|A\|$.

***I.D* -** Notons $AB = (C_{i,j})$ où $C_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} A_{i,k}B_{k,j}$.

D'après l'inégalité de Schwarz dans $\mathbb{R}^d$, $(C_{i,j})^2 \leqslant \displaystyle\Big(\sum_{k=1}^{d} A_{i,k}^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{d} B_{k,j}^2\Big)$.

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{d}(C_{i,j})^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} A_{i,k}^2\Big).\Big(\sum_{k=1}^{d} B_{k,j}^2\Big) = \|A\|^2\Big(\sum_{k=1}^{d} B_{k,j}^2\Big)$.

D'où $\|A \times B\|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d}(C_{i,j})^2 \leqslant \|A\|^2 \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} B_{k,j}^2 = \|A\|^2.\|B\|^2$.

Une norme étant positive, $\|A \times B\| \leqslant \|A\|.\|B\|$.

***I.E* -** Par une récurrence immédiate, on déduit de I.D : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$.

Partie II

***II.A* -** Soit $r \in]0, R[$. Si $\|A\| \leqslant r$, on déduit de I.E. $\forall n \geqslant 1$, $\|a_n A^n\| \leqslant |a_n| r^n$. Comme la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence $R > r > 0$, la série $\sum |a_n| r^n$ converge. La série de fonctions continues $A \mapsto a_n A^n$ converge donc normalement sur la boule fermé de centre 0 et de rayon r *a fortiori* sur tout compact contenu dans $\mathcal{B}$. Sa somme φ est donc continue sur $\mathcal{B}$.

II.B -

II.B.1) $A \neq 0$. Soit $r = \deg(\Pi_A) \geqslant 1$ où Π_A est le polynôme minimal de A. D'après le cours, $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ de dimension r, dont une base est $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$. Il s'ensuit que $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$ est libre et $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r}$ est liée.

II.B.2) Le vecteur A^n a pour coordonnées $(\lambda_{k,r})_{0\leqslant k\leqslant r-1}$ dans la base $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$ de $\mathbb{R}[A]$. D'où l'existence et l'unicité demandées.

II.B.3) L'espace vectoriel $\mathbb{R}[A]$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Si $M \in \mathbb{R}[A]$ a pour coordonnées $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$ dans la base $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$ l'application N qui à $M = \alpha_0 I_d + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{r-1}A^{r-1}$ associe $|\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{r-1}|$ est une norme sur $\mathbb{R}[A]$.
Il existe donc $C > 0$ tel que : $\forall M \in \mathbb{R}[A], N(M) \leqslant C\|M\|$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leqslant C\|A^n\|$.

II.B.4) On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, r-1]\!], |\lambda_{k,n}| \leqslant C\|A^n\|$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall k \in [\![0, r-1]\!], |a_n\lambda_{k,n}| \leqslant C|a_n|\|A\|^n$.
Comme $\|A\| < r$, la série $\sum |a_n|\|A\|^n$ converge, d'où la convergence absolue des r séries $\sum a_n\lambda_{k,n}$.

II.B.5) $\varphi(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big(\sum_{k=0}^{r-1}\lambda_{k,n}A^k\Big)$. Comme les r séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n\lambda_{k,n}$ convergent d'après II.B.4), on a $\varphi(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda_{k,n}\Big)A^k = \sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k A^k$ où $\alpha_k \in \mathbb{C}$

$\alpha_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda_{k,n}$. Donc $\varphi(A) = P(A)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $< r$.

II.B.6) Comme $a_n = \dfrac{1}{n!}$ pour tout n, on a $R = +\infty$ puisque pour tout $z \in \mathbb{C}, e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.
Si les colonnes de A sont C_1, C_2, C_3, on remarque que $C_2 = C_3 - C_1$; donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$, d'où 0 est valeur propre de A.

Notons encore que $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\mathrm{rg}(A - I_3) = 1$, donc 1 est valeur propre d'ordre $\geqslant 2$ de A. Un calcul immédiat donne $A(A - I_3) = 0$, donc A est diagonalisable et son polynôme minimal est $\Pi_A = X(X-1)$.
Donc $A^2 = A$ et par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^\star, A^n = A$.

Donc $\exp(A) = I_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I_3 + (e-1)A = P(A)$ où $P(X) = (e-1)X + 1$.

***I.C* -** Si $\varphi = P$, alors $\forall A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R}), \varphi(A) = P(A)$.

Réciproquement, s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R}), \varphi(A) = P(A)$.
Si $A = xI_d, x \in \mathbb{R}$, alors $\varphi(x) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$.

Donc $\forall n > \deg(P), a_n = 0$. D'où φ est une fonction polynôme.
D'où la conclusion la C.N.S. demandée est : φ est une fonction polynôme.

Partie III

***III.A* -**

III.A.1) Le produit de deux séries absolument convergentes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série absolument convergente $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. de plus

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

III.A.2) Compte tenu de l'énoncé, posons $u_n = \frac{(iA)^n}{n!}$ et $v_n = \frac{(iB)^n}{n!}$

$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(iA)^k}{k!} \cdot \frac{(iB)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (iA)^k (iB)^{n-k} = \frac{(i(A+B))^n}{n!}$

d'après le binôme de Newton puisque $AB = BA$.

III.A.3) $\left\| \frac{(iA)^{2n}}{(2n)!} \right\| \leqslant \frac{\|A\|^{2n}}{(2n)!}$. Comme la série $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge et a pour somme $\mathrm{ch}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum (-1)^n \frac{(iA)^{2n}}{(2n)!}$ converge absolument.

D'où la définition de $\cos(A) = \frac{1}{2}\big(e^{iA} + e^{-iA}\big)$. De même, on prouve que $\sin(A)$ existe et $\sin(A) = \frac{1}{2}\big(e^{iA} - e^{-iA}\big)$.

Comme iA et $-iA$ commutent, on déduit de III.A.2) :

$\cos^2(A) = \frac{1}{4}\big(e^{2iA} + e^{-2iA} + 2\big)$ et $\sin^2(A) = \frac{1}{-4}\big(e^{2iA} + e^{-2iA} - 2\big)$.

D'où $\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$.

***III.B* -**

III.B.1) Si $\|(Re^{i\theta})^{-1}A\| = \frac{\|A\|}{R} < 1$, on sait, d'après un théorème que

$(I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A)$ est inversible et $(I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \big((Re^{i\theta})^{-1}A\big)^n$.

Comme $Re^{i\theta} I_d - A = Re^{i\theta}\big(I_d - (Re^{i\theta})^{-1}A\big)$ le résultat est établi si $\|A\| < R$.

III.B.2) $(Re^{i\theta})^n\big(Re^{i\theta}I_d - A\big)^{-1} = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} u_p(\theta)$ où $u_p(\theta) = (Re^{i\theta})^{n-p-1}A^p$ d'après III.B.1).On a : $\forall\theta\in\mathbb{R}, \|u_p(\theta)\| \leqslant R^{n-1}\Big(\dfrac{\|A\|}{R}\Big)^p = \lambda_p$.
Si $\|A\| < R$, la série géométrique $\sum\lambda_p$ converge. Comme λ_p est indépendant de θ, la série de fonctions $\sum u_p$ converge normalement sur $[0,2\pi]$. On déduit du théorème d'intégration des séries de fonctions continues sur un segment que : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^n(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta = \sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_p(\theta)d\theta$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_p(\theta)d\theta = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-p-1)\theta}d\theta\Big)R^{n-p-1}A^p = \begin{cases} A^{n-1} & \text{si } p=n-1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

car $\forall k\in\mathbb{Z}, \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}d\theta = \begin{cases}1 & \text{si } k=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Donc $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^n(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta = A^{n-1}$ si $R > \|A\|$.

III.B.3) Par linéarité de l'intégration, si $R > \|A\|$,

$$\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta = \sum_{k=0}^{d}a_k\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^{k+1}(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta.$$
$$= \sum_{k=0}^{d}a_kA^k = \chi_A(A) \text{ d'après III.B.2).}$$

III.B.4) Si M est inversible, $\det(M)\,M^{-1} = {}^t\mathrm{Com}(M)$.
Avec $M = Re^{i\theta}I_d - A$, on a $\det(M) = (-1)^d\chi_A(Re^{i\theta})$.
Donc $(Re^{i\theta})\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} = Re^{i\theta}(-1)^{d\,t}\mathrm{Com}(Re^{i\theta}I_d - A)$.
$\mathrm{Com}(XI_d - A)$ est une matrice dont les coefficients sont des polynômes en X de degré $< d$, donc les coefficients de la matrice $Re^{i\theta}\chi_A(Re^{i\theta})^t\,\mathrm{Com}(Re^{i\theta}I_d - A)$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $\theta\mapsto e^{ik\theta}, k\geqslant 1$.
Comme $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}d\theta = 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$, on a $\chi_A(A) = 0$.

Partie IV

***IV.A* -** $\forall(x,t)\in\Big]-\infty,\dfrac{M}{2}\Big[^2, 2f(x+t) = f(2x) + f(2t)$. (IV.1)

Donc $\forall(x,y)\in\Big]-\infty,\dfrac{M}{2}\Big[^2, \displaystyle\int_\alpha^y 2f(x+t)dt = \int_\alpha^y f(2x)dt + \int_\alpha^y f(2t)dt$ $(\star)$.

$\displaystyle\int_\alpha^y 2f(x+t)dt = 2\int_{x+\alpha}^{y+\alpha}f(u)du = 2(F(y+\alpha) - F(x+\alpha))$ par changement de variable affine. Toujours par changement de variable affine on a aussi

$$\int_\alpha^y f(2t)dt = \frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{2y}f(u)du = \frac{1}{2}\big(F(2y) - F(2\alpha)\big).$$