Notations et conventions

- Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

- On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne correspondante, ce qui permet des écritures du type Ax où A est une matrice carrée réelle de taille n et x un élément de $\mathbb{R}^n$.

- Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on note $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big)$ ce qui, compte tenu de la convention précédente, s'écrit aussi $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$

Si i et j sont deux entiers de $[\![1, n]\!]$, la j-ième dérivée partielle de f_i en x est notée $D_j f_i(x)$)ou $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.

- Le déterminant d'une matrice carrée A est noté $\det(A)$.

- Avec les notations précédentes, on appelle matrice jacobienne de f en x et on note $J_f(x)$ la matrice carrée réelle de taille n dont le terme situé sur la i-ème ligne et la j-ième colonne est $D_j f_i(x)$.

- On appelle jacobien de f en x et on note $\mathrm{jac}_f(x)$, le déterminant $\det(J_f(x))$ de la matrice jacobienne $J_f(x)$.

- On appelle divergence de f en x et on note $\mathrm{div}_f(x)$, la trace de la matrice jacobienne $J_f(x)$. On a donc $\mathrm{div}_f(x) = \mathrm{tr}(J_f(x)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} D_i f_i(x)$.

Les quatre parties sont pour une large part indépendantes les unes des autres.

I Une interprétation du jacobien

I.A **-** Soit A une matrice carrée réelle de taille n et b un élément de $\mathbb{R}^n$. Soit f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa matrice jacobienne $J_f(x)$ en tout point x de $\mathbb{R}^n$.

***I.B* -** Dans cette section, g désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On fixe un élément $a = (a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = g(ta) = g(ta_1, ta_2, \dots, ta_n)$.

I.B.1) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, donner $\varphi'(t)$.

I.B.2) En déduire qu'au voisinage de 0,

$$g(ta) = g(0) + t\big(a_1 D_1 g(0) + \cdots + a_n D_n g(0)\big) + o(t).$$

***I.C* -** Dans cette section, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f(0) = 0$.

Pour t réel et j entier de $[\![1, n]\!]$, on note t_j l'élément $(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$, le réel t étant situé au rang j.

I.C.1) On admettra que si des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi(t) = \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

En utilisant la question I.B.2 et la multilinéarité du déterminant, montrer qu'au voisinage de 0 : $\det(f(t_1), \dots, f(t_n)) = t^n \mathrm{jac}_f(0) + o(t^n)$.

I.C.2) En déduire que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\det(f(t_1), f_2(t), \dots, f(t_n))}{\det(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \mathrm{jac}_f(0)$.

I.C.3) Dans le cas $n = 2$ (respectivement $n = 3$), donner une interprétation géométrique de la valeur absolue du jacobien de f en 0 à l'aide d'aires de parallélogrammes (respectivement volumes de parallélépipèdes).

II Une interprétation de la divergence dans un cas particulier

On désigne par A une matrice réelle carrée de taille 2 et on pose, pour tout x dans $\mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$.

***II.A* -** Pour x dans $\mathbb{R}^2$, exprimer $\mathrm{div}_f(x)$ à l'aide de A seulement.

Pour a dans $\mathbb{R}^2$, on note $u_a(t)$ la solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$X' = AX, \ X(0) = a.$$

Autrement dit, u_a est l'unique fonction $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $u_a(0) = a$ et, pour tout réel $t, u_a'(t) = Au_a(t)$.

***II.B* -** Dans cette section et la suivante, on suppose A diagonale de la forme $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

II.B.1) Que vaut $u_a(t)$?

II.B.2) Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et soit t un réel. Montrer que

$$\det(u_a(t), u_b(t)) = \exp\big(t\mathrm{div}_f(a)\big)\det\big(u_a(0), u_b(0)\big)\cdot$$

II.B.3) Utiliser le résultat précédent pour interpréter le signe de $\mathrm{div}_f(a)$ en termes de sens de variation de l'aire d'un certain parallélogramme comme fonction de t.

II.C - Exemple

On suppose toujours que $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

II.C.1) On pose $a = (a_1, a_2)$ et $u_a(t) = (x_1(t), x_2(t))$. On suppose $\lambda_1 \neq 0$ et $a_1 > 0$. Déterminer une fonction θ_a telle que $x_2(t) = \theta_a(x_1(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

II.C.2) Dans cette question $a = (1, 2)$ et $b = (1, 2)$.
Pour chacun des cas suivants, illustrer sur une même figure les courbes représentatives des fonctions θ_a, θ_b et θ_{a+b}, ainsi que les parallélogrammes de sommets (0,0), $u_a(t), u_b(t)$ et $u_a(t) + u_b(t)$ pour $t = 0$ et une valeur de t strictement positive.

a) $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

b) $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

c) $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

II.D -

II.D.1) Reprendre les questions II.B.1 et II.B.2 dans le cas où A est triangulaire de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

II.D.2) Montrer que la relation

$$\det(u_a(t), u_b(t)) = \exp\big(t\mathrm{div}_f(a)\big)\det\big(u_a(0), u_b(0)\big)\cdot$$

est valable lorsque la matrice A possède un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$.

II.D.3) Étendre ce résultat au cas d'une matrice réelle 2×2 quelconque.

III Matrice jacobienne symétrique, antisymétrique

Dans le début de cette partie f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on note toujours

$$f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Si i, j et k sont trois entiers de $[\![1, n]\!]$, la dérivée partielle seconde de f_k

en x par rapport aux variables x_i et x_j est notée $D_{i,j}f_k(x)$ ou $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ ou encore $f_{i,j,k}(x)$.

III.A **-** Justifier que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, on a $f_{i,j,k}(x) = f_{j,i,k}(x)$.

III.B **-** Dans cette section, on suppose que la matrice jacobienne $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.

III.B.1) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, $f_{i,j,k}(x) = f_{i,k,j}(x)$.

III.B.2) En déduire que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, on a : $f_{i,j,k}(x) = 0$.

III.B.3) Montrer qu'il existe une matrice carrée réelle A de taille n et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$.
Justifier que A est antisymétrique.

III.B.4) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f, la matrice jacobienne $J_f(x)$ est-elle antisymétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$?

III.C **-** Maintenant f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
Montrer que la matrice jacobienne $J_f(x)$ est symétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall i \in [\![1, n]\!], f_i(x) = D_i g(x)$.
On pourra considérer l'application $g : x \mapsto g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 f_i(tx)dt$ *et on exprimera* $D_i g(x)$ *sous forme d'une seule intégrale.*

IV Matrice jacobienne orthogonale

Dans cette partie, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
On considère la proposition $(\mathcal{P})$:
Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ de f est orthogonale.
Pour x dans $\mathbb{R}^n$ et i, j et k dans $[\![1, n]\!]$,, on note

$$\alpha_{i,j,k}(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x).$$

IV.A - On suppose $(\mathcal{P})$.

IV.A.1) Montrer que pour tous i, j et k de $[\![1, n]\!]$,

$$\alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}.$$

IV.A.2) En déduire que pour tous i, j et k de $[\![1, n]\!]$, $\alpha_{i,j,k} = 0$.

IV.A.3) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale A et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$.

On pourra interpréter les relations $\alpha_{i,j,k} = 0$ à l'aide de produits matriciels.

IV.B - Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f, la proposition $(\mathcal{P})$ est-elle réalisée ?

IV.C - Si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on note $\Delta_g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(x)$ (laplacien de g en x).

Montrer que $(\mathcal{P})$ est équivalente à la proposition

Pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\Delta_{g \circ f} = (\Delta_g) \circ f$.

Solution

Partie I

I.A - $f(x) = Ax + b \iff \forall i \in [\![1, n]\!], f_i(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + b_i$.

Les fonctions f_i étant polynomiales, elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $D_j f_i(x) = a_{i,j}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $J_f(x) = A$.

I.B -

I.B.1) La fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto ta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\psi'(t) = a$.

Par composition $\varphi = g \circ \psi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = dg(\psi(t))(\psi'(t))$ *i.e.* $\varphi'(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}(\psi(t)) a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k D_k g(ta)$.

I.B.2) φ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur elle a un développement limité d'ordre 1 en 0.

Donc $\varphi(t) \underset{t \to 0}{=} \varphi(0) + t\varphi'(0) + o(t)$. Donc $\varphi(t) \underset{t \to 0}{=} g(0) + t \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k D_k g(0) + o(t)$.

I.C -

I.C.1) f étant de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = 0$, $f(t_j) = tD_j f(0) + t\varphi_j(t)$ où φ_j est continue de limite nulle en 0.

$\det(f(t_1), \ldots, f(t_n)) = t^n \det\big(D_1 f(0) + \varphi_1(t), \ldots, D_n f(0) + \varphi_n(t)\big)$ par n-linéarité de det.

On déduit du résultat admis par l'énoncé et des propriétés des fonctions φ_j :
$\lim\limits_{t\to 0} \det\big(D_1 f(0) + \varphi_1(t), \dots, D_n f(0) + \varphi_n(t)\big) = \det\big(D_1 f(0), \dots, D_n f(0)\big)$
Donc $\det(f(t_1), \dots, f(t_n)) \underset{t\to 0}{=} t^n \Big(\det\big(D_1 f(0), \dots, D_n f(0)\big) + o(1)\Big)$
i.e. $\det(f(t_1), \dots, f(t_n)) \underset{t\to 0}{=} t^n \ \mathrm{jac}_f(0) + o(t^n)$.

I.C.2) $\det(t_1, \dots, t_n) = \det_{\mathcal{B}}(te_1, \dots, te_n)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc $\det(t_1, \dots, t_n) = t^n$. D'où le résultat.

I.C.3) Si l'on connaît les définitions des aires de parallélogrammes et des volumes de parallélépipèdes, le résltat est immédiat et suggéré par l'énoncé.

Partie II

***II.A* -** Si $f(x) = Ax$, on déduit de I.A que $\mathrm{div}_f(x) = \mathrm{tr}(A)$.

***II.B* -**

II.B.1) $X' = AX \iff \begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = x_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) = x_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

Donc $u_a(t) = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})u_a(0)$.

II.B.2) $\det(u_a(t), u_b(t)) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t}x_1(0) & e^{\lambda_1 t}y_1(0) \\ e^{\lambda_2 t}x_2(0) & e^{\lambda_2 t}y_2(0) \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t} \begin{vmatrix} x_1(0) & y_1(0) \\ x_2(0) & y_2(0) \end{vmatrix}$.
i.e. $\det(u_a(t), u_b(t)) = e^{t\,\mathrm{tr}(A)} \det(u_a(0), u_b(0))$. D'où le résultat d'après II.A.

I.B.3) L'aire du parallélogramme construit à partir des deux vecteurs $u_a(t)$ et $u_b(t)$ est $|\det(u_a(t), u_b(t)|$. Elle croît si $\mathrm{div}_f(a) > 0$ et décroît sinon.

***II.C* -**

II.C.1) Si $a_1 > 0$ et $\lambda_1 \neq$, on a $t = \dfrac{1}{\lambda_1} \ln\Big(\dfrac{x_1(t)}{a_1}\Big)$. Comme $x_2(t) = a_2 e^{\lambda_2 t}$ on obtient $x_2(t) = \theta_a(x_1(t))$ où $\theta_a : t \mapsto a_2\Big(\dfrac{t}{a_1}\Big)^{\lambda_2/\lambda_1}$.

II.C.2) $\theta_a(t) = \Big(\dfrac{t}{2}\Big)^{\lambda_2/\lambda_1}$, $\theta_b(t) = 2t^{\lambda_2/\lambda_1}$ et $\theta_{a+b}(t) = 3\Big(\dfrac{t}{3}\Big)^{\lambda_2/\lambda_1}$.

Dessins laissés aux lecteurs. Nous recommandons vivement à nos lecteurs étudiants de faire les dessins le jour du concours, car les questions suivantes (parties III et IV) sont largement inabordables pour des étudiants de la filière.

***II.D* -**

II.D.1) $X' = AX \iff \begin{cases} x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = \lambda x_1 + x_2(0)e^{\lambda t} \\ x_2(t) = x_2(0)e^{\lambda t} \end{cases}$

$x_1(t) = \lambda x_1 + x_2(0)e^{\lambda t} \iff \dfrac{d}{dt}\big(e^{-\lambda t}x_1(t)\big) = x_2(0) = \dfrac{d}{dt}\big(x_2(0)t\big)$.

Donc $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$.

$\det(u_a(t), u_b(t)) = \begin{vmatrix} e^{\lambda t}(a_1 + ta_2) & e^{\lambda t}(b_1 + tb_2) \\ e^{\lambda t}a_2 & e^{\lambda t}b_2 \end{vmatrix} = e^{2\lambda} \begin{vmatrix} a_1 + ta_2 & b_1 + tb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

$\det(u_a(t), u_b(t)) = e^{2\lambda t}(a_1b_2 - a_2b_1) = e^{t\,\mathrm{tr}(A)}\det(u_a(0), u_b(0))$.

II.D.2) Si $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$ est scindé sur $\mathbb{R}$, on a trois cas.

• Si A a deux valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 alors $A = PDP^{-1}$ où $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ en notant $X = PY$ avec $Y \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a :
$X' = AX \iff Y' = DY \iff v_a(t) = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})v_a(0)$ avec des notations évidentes. Donc $u_a(t) = P\,\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})P^{-1}u_a(0)$.
Comme matrices semblables on même trace et même déterminant, on a le résultat compte tenu de II.A.

• Si A au une valeur propre unique λ et est diagonalisable, alors $A = \lambda I_2$ et on conclut avec II.B.

• Si A est trigonalisable, $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En procédant comme dans le premier cas au remplacement près de D par T et en utilisant II.D.1), on conclut.

II.D.3) On considère que $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$. Le cas qu'il reste à examiner, compte tenu de II.D.2) est celui où α a deux valeurs propres λ_1, λ_2 complexes distinctes ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ car $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$). On est ramené au premier cas précédent avec λ_1 et λ_2 complexes.

Partie III

III.A - Comme $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, le résultat se déduit du théorème de Schwarz.

III.B -

III.B.1) $J_f(x) = \left(\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ étant antisymétrique,

pour tous $j, k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = -\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)\cdot$ Par dérivation par rapport à x_i

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}(x)$ *i.e.*

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall (i,j,k) \in [\![1, n]\!]^3, f_{i,j,k}(x) = f_{i,k,j}(x)$.

III.B.2) D'après III.A. $f_{i,j,k} = f_{j,i,k} = -f_{j,k,i}$ d'après III.B.1)

D'après III.B.1) et III.A, $f_{i,j,k} = -f_{i,k,j} = f_{k,i,j}$

D'après III.B.1), $f_{i,j,k} = f_{k,j,i} = f_{j,k,i}$. D'où $f_{i,j,k} = 0$.

III.B.3) Tous les vecteurs $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)$ sont nuls. Donc les vecteurs $V_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont constants. L'application $u : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i V_i$ est telle que $f - u$ est constante sur $\mathbb{R}^n$. Il existe donc $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = u(x) + b$.

Comme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, En notant A la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$. Comme $A = J_f(x)$, la matrice A est antisymétrique.

III.B.4) On déduit de III.A et III.B, la condition nécessaire et suffisante que $J_f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, soit antisymétrique est : il existe $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$.

III.C - S'il existe g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall i \in [\![1, n]\!], f_i(x) = D_i g(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n, D_j f_i(x) = D_j D_i g(x) = D_i D_j g(x)$ car g est de classe $\mathcal{C}^2$ et d'après le théorème de Schwarz. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n, D_j f_i(x) = D_i f_j(x)$ ce qui traduit le caractère symétrique de la matrice $J_f(x)$.

Réciproquement, supposons la matrice $J_f(x)$ symétrique.

Soit $g \,:\, x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 f_i(tx)dt$. Nous laissons le lecteur vérifier que le théorème de dérivation sous le signe somme est applicable.

$\forall x \in \mathbb{R}^n, D_j g(x) = \displaystyle\int_0^1 f_j(tx)dt + \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx)dt.$

Par linéarité de l'intégration et comme $J_f(x)$ est symétrique,

$D_j g(x) = \displaystyle\int_0^1 \Big(f_j(tx)dt + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) \Big) dt.$

$f_j(tx)dt + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) = \frac{d}{dt}(tf_j(tx))$, donc $D_j g(x) = \Big[tf_j(tx) \Big]_{t=0}^{t=1} = f_j(x)$.

La condition nécessaire et suffisante que $J_f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, soit antisymétrique est donc établie.

Partie IV

IV.A -

IV.A.1) Comme la matrice $J_f(x)$ est orthogonale, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ses vecteurs colonnes $\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\Big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ constituent une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$. Donc $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Big| \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) \Big) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, par dérivation :

$\forall i, j, k \in [\![1, n]\!], \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Big| \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) \Big) + \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) \Big| \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) \Big) = 0.$

Comme $\alpha_{i,j,k}(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Big| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) \Big)$,

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall i, j, k \in [\![1, n]\!], \alpha_{i,j,k}(x) + \alpha_{j,i,k}(x) = 0.$

D'après le théorème de Schwarz, $\alpha_{i,j,k}(x) = \alpha_{i,k,j}(x)$.

IV.A.2) De même, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall i, j, k \in [\![1, n]\!]$,

$\alpha_{j,k,i}(x) + \alpha_{j,i,k}(x) = 0$ et $\alpha_{k,i,j}(x) + \alpha_{i,k,j}(x) = 0$.

D'après le théorème de Schwarz, $\alpha_{k,j,i}(x) = \alpha_{k,i,j}(x)$.