

CHAPITRE I

LES EQUATIONS DE MAXWELL

Les équations de Maxwell synthétisent les lois de l'électrocinétique et de l'électromagnétisme en régime quelconque, que le milieu soit linéaire et isotrope ou non. Ces équations permettent d'établir l'équation de Helmholtz, équation différentielle représentative de la propagation des champs électromagnétiques. Quelle que soit la structure de propagation, espace libre ou guides, la résolution de l'équation de Helmholtz se fait en régime permanent sinusoïdal et la détermination des composantes des champs est un problème de limites en fonction de la structure du guide et de la nature des matériaux entourant le diélectrique.

1. Champs sinusoïdaux

On considère un champ vectoriel, variable dans le temps, défini en chaque point M de l'espace et à chaque instant t . Un vecteur représentatif de ce champ est noté $\vec{\mathcal{V}}(M, t)$. Par rapport à un repère métrique à trois dimensions (x_1, x_2, x_3) , chaque composante de ce vecteur est donc notée $\mathcal{V}_i(M, t)$. Pour simplifier, il est commode de considérer l'espace défini par rapport à un repère orthonormé à trois composantes. A chaque point M de l'espace, l'extrémité du vecteur $\vec{\mathcal{V}}(M, t)$ décrit une courbe dont chaque composante $\mathcal{V}_i(M, t)$ constitue une représentation paramétrique en fonction de t . Ainsi en régime sinusoïdal de pulsation ω chaque composante peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_i(M, t) &= V_{0,i}(M) \cos(\omega t + \varphi_i(M)) \\ \mathcal{V}_i(M, t) &= V_{0,i}(M) (\cos[\varphi_i(M)] \cos(\omega t) - \sin[\varphi_i(M)] \sin(\omega t))\end{aligned}$$

Cette dernière égalité traduit une représentation paramétrique d'une ellipse dont les deux vecteurs fixes ont pour composantes :

$$\begin{aligned}A_i &= V_{i,0}(M) \cos(\varphi_i(M)) \\ B_i &= V_{i,0}(M) \sin(\varphi_i(M))\end{aligned}$$

Les composantes A_i et B_i sont représentatives des vecteurs $\vec{A}(M)$ et $\vec{B}(M)$. En conséquence, le champ $\vec{\mathcal{V}}(M, t)$ s'exprimera sous la forme :

$$\vec{\mathcal{V}}(M, t) = \vec{A}(M) \cos(\omega t) + \vec{B}(M) \sin(\omega t) \quad (1-1)$$

Si $\vec{A}(M)$ et $\vec{B}(M)$ ne sont pas parallèles, le vecteur $\vec{\mathcal{V}}(M, t)$ décrira une ellipse. On dit que le champ $\vec{\mathcal{V}}(M, t)$ a une **polarisation elliptique**. C'est la propriété la plus générale des champs sinusoïdaux. Lorsque les vecteurs $\vec{A}(M)$ et $\vec{B}(M)$ sont à la fois perpendiculaires et égaux en module, la **polarisation est dite circulaire**. Si $\vec{A}(M)$ et $\vec{B}(M)$ sont colinéaires, la **polarisation est rectiligne**. Si le vecteur $\vec{\mathcal{V}}(M, t)$ est représentatif d'un champ électromagnétique, $\vec{\mathcal{A}}(M, t)$ sera par exemple le champ électrique et $\vec{\mathcal{B}}(M, t)$ le champ magnétique.

2. Les équations

2-1 Equation de Poisson

Si l'on considère un volume (V), limité par une surface fermée (S) et contenant des charges électrostatiques avec la densité volumique ρ , l'application du théorème de Gauss donne :

$$\int_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho \, dv = \int_V \operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} \, dv$$

Ce qui conduit à : $\operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon}$ (équation de Poisson) (1-2)

Dans un milieu diélectrique où les molécules se comportent comme des dipôles électriques, on définit un vecteur de polarisation \vec{p} , se rapportant à une densité de charges fictives égale à $-\operatorname{div} \vec{p}$. Le théorème de Gauss prend alors la forme :

$$\int_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho \, dv - \frac{1}{\epsilon} \int_V \operatorname{div} \vec{p} \, dv$$

Donc :

$$\int_V \operatorname{div}[\epsilon \vec{\mathcal{E}} + \vec{p}] \, dv = \int_V \rho \, dv$$

On pose alors $\operatorname{div} \vec{\mathcal{D}} = \rho$ et $\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} + \vec{p}$ où, $\vec{\mathcal{D}}$ est le vecteur induction électrique.

2-2 Induction magnétique

On démontre que si dans un volume donné, il n'existe pas de masses magnétiques libres, alors $\operatorname{div} \vec{\mathcal{H}} = 0$. Comme $\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}$, il en résulte que $\operatorname{div} \vec{\mathcal{B}} = 0$. L'application du théorème d'Ampère permet d'affirmer que la circulation du vecteur $\vec{\mathcal{H}}$ sur un

contour fermé (C) est égale à la somme des courants entourés par le contour (C), d'où l'identité :

$$\int_C \vec{\mathcal{H}} d\vec{l} = \sum \mathcal{I}$$

Si le contour n'enferme aucun courant alors $\int_C \vec{\mathcal{H}} d\vec{l} = 0$

2-3 Loi de Faraday

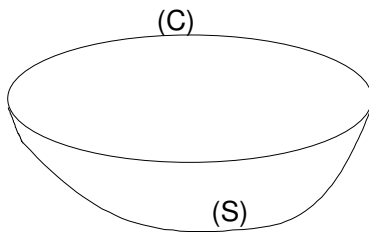


Fig. 1-1

La force électromotrice (fem.) induite dans un circuit (C) placé dans un champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ est donnée par la circulation du vecteur $\vec{\mathcal{E}}$ le long du circuit (C) soit :

$$fem = \int_C \vec{\mathcal{E}} d\vec{l}$$

Si l'on désigne par (S) la surface quelconque qui s'appuie sur le contour (C), l'application du théorème de Stokes donne :

$$\int_C \vec{\mathcal{E}} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{\mathcal{E}} d\vec{S}$$

La loi de Faraday indique que la force électromotrice induite dans le circuit (C) est proportionnelle à la variation du flux de $\vec{\mathcal{B}}$ par rapport au temps. Cela se traduit par :

$$\int_S \text{rot } \vec{\mathcal{E}} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} d\vec{S}$$

d'où

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = - \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (1-3)$$

2-4 Loi d'Ampère

La loi d'Ampère traduit le fait que la circulation du vecteur $\vec{\mathcal{H}}$ est égale à la somme des courants entourés par le circuit fermé (C) sur lequel se déplace le vecteur $\vec{\mathcal{H}}$. Il y a lieu de considérer les courants de conduction de densité surfacique \vec{j} , et les courants de déplacement qui sont donnés par la variation du vecteur induction électrique $\vec{\mathcal{D}}$ par rapport au temps. Cela se traduit par l'équation suivante :

$$\int_C \vec{\mathcal{H}} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Après l'application du théorème de *Stokes* et identification on établit :

$$\operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (1-4)$$

2-5 Les équations de Maxwell

Les équations de *Maxwell* synthétisent les lois de *Faraday* et d'*Ampère*. Dans un milieu non polarisé électriquement ni magnétiquement, elles ont pour expressions :

$$\text{Loi de Faraday} \quad \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

$$\text{Loi d'Ampère} \quad \operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

$$\text{Avec les relations :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}} \\ \operatorname{div} \vec{\mathcal{B}} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{\mathcal{D}} = \rho \\ \vec{\mathcal{D}} = \varepsilon \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{j} = \sigma \vec{\mathcal{E}} \end{array} \right.$$

$$\text{où} \quad \left. \begin{array}{l} \mu \text{ est la perméabilité} \\ \varepsilon \text{ est la permittivité} \\ \sigma \text{ est la conductibilité} \end{array} \right\} \text{ du milieu considéré}$$

2-6 Conditions en régime permanent

Considérant $\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon \vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{j} = \sigma \vec{\mathcal{E}}$, l'équation d'*Ampère*, $\operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$, peut s'écrire

sous la forme : $\operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{\mathcal{D}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$. La divergence d'un rotationnel étant identiquement

nulle alors, $\operatorname{div}[\operatorname{rot}(\vec{\mathcal{H}})] = 0$. Cette identité permet d'écrire :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{\mathcal{D}} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \right) = 0$$

On en déduit $\frac{d\rho}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0$, équation différentielle dont la solution est $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$.

Le rapport $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ est appelé constante de temps de relaxation du milieu. Dans un milieu diélectrique, σ est très faible. Cependant, lorsqu'un régime permanent s'établit,

s'il existait des charges électriques dans le milieu, au bout d'un temps très court, toutes ces charges seraient évacuées pour se fixer à la périphérie de ce milieu. Il en résulte une condition très importante, en régime permanent, la densité de charges électriques libres dans un diélectrique est nulle. Cela se concrétise par $\text{div } \vec{\mathcal{E}} = 0$.

2-7 Equations de Maxwell en régime sinusoïdal

En considérant que les vecteurs $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ sont définis par une représentation complexe en fonction du temps tel que $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$ et $\vec{\mathcal{H}} = \vec{H}_0 e^{j\omega t}$, alors :

$$\text{rot } \vec{E}_0 = -j\omega\mu \vec{H}_0 \quad (1-5)$$

$$\text{rot } \vec{H}_0 = -(j\omega\epsilon + \sigma) \vec{E}_0 \quad (1-6)$$

$$\text{div } \vec{E}_0 = 0 \quad (1-7)$$

$$\text{div } \vec{H}_0 = 0 \quad (1-8)$$

Les équations (1-5) à (1-8) sont les équations de Maxwell en régime permanent sinusoïdal. Dans le cas le plus général μ , ϵ et σ sont des nombres complexes. Pour la suite des développements, ces grandeurs seront prises comme réelles. Cela ne sacrifie en rien au caractère général.

Dans l'équation (1-6) la quantité $j\omega\epsilon + \sigma$ est un nombre complexe qui peut être écrit sous la forme $\omega\epsilon (j + \frac{\sigma}{\omega\epsilon})$. On pose $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \tan(\vartheta)$ où ϑ est appelé angle de perte.

Dans un diélectrique, $\tan(\vartheta)$ mesure le rapport du courant de conduction au courant de déplacement.

Les isolants parfaits sont caractérisés par $\tan(\vartheta) = 0$ soit $\sigma = 0$.

Les conducteurs parfaits sont caractérisés par $\tan(\vartheta) = \infty$ soit $\sigma = \infty$.

Ces deux milieux idéaux n'existent pas. Cependant pour des domaines de fréquences suffisamment grands (jusqu'à quelques dizaines de GHz), le cuivre peut être considéré comme un conducteur presque parfait. Le Téflon[®] ou le polyéthylène peut être assimilés à un diélectriques parfaits.

2-8 Exemples

⇒ **Un conducteur** : Soit un conducteur en cuivre dont la conductibilité est de $5,6810^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ et dont la permittivité ϵ vaut ϵ_0 , soit $10^{-9}/36\pi$. Calculer $\tan\vartheta$ à la fréquence de 1 GHz.

⇒ **Un isolant** : Soit le Téflon[®] dont $\tan\vartheta$ vaut 610^{-4} à 25 GHz et dont la permittivité relative est sensiblement égale à 2,1. Calculer la valeur de la conductivité à 25 GHz.

Dans chacun des exemples, la résolution se fait en appliquant la définition de l'angle de perte.

Pour le conducteur, $\tan \partial = \frac{5,6510^7 36\pi}{2\pi \cdot 10^9 \cdot 10^{-9}} = 1,017 \cdot 10^5$

soit $\partial = 89,99994^\circ$, très proche de 90° . Le cuivre peut être considéré comme un conducteur parfait, avec quelques précautions néanmoins.

Pour l'isolant, $\sigma = \epsilon \omega \tan \partial$ et, tous calculs faits, $\sigma = 1,75 \cdot 10^{-3}$. La conductibilité est donc très faible et le Téflon[®] pourra être assimilé à un isolant parfait.

3. Cas des milieux conducteurs

Les milieux conducteurs vérifient la loi d'Ohm, c'est à dire $\vec{j}_0 = \sigma \vec{E}_0$, où \vec{j} est la densité de courant par unité de surface, σ la conductibilité. Le milieu est suffisamment bon conducteur pour négliger les courants de déplacement. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{rot } \vec{E}_0 = -j\omega\mu \vec{H}_0 \quad (1-9)$$

$$\text{rot } \vec{H}_0 = \sigma \vec{E}_0 \quad (1-10)$$

En prenant le rotationnel de l'équation (1-9) et en portant (1-10) dans cette nouvelle équation, cela donne :

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}_0) = -j\omega\mu\epsilon \vec{E}_0$$

Avec $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}_0) = \text{grad}[\text{div}(\vec{E}_0)] - \Delta \vec{E}_0$ et $\text{div}(\vec{E}_0) = 0$, on aboutit à :

$$\Delta \vec{E}_0 - j\omega\mu\epsilon \vec{E}_0 = 0 \quad (1-11)$$

$\Delta \vec{E}_0$ est le Laplacien vectoriel de \vec{E}_0 . Si l'on considère par exemple que \vec{E}_0 est uniquement fonction de z , (1-11) s'écrit :

$$\frac{d^2 E_0(z)}{dz^2} - (1+j)^2 \left[\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \right]^2 E_0(z)$$

La quantité $\delta = \sqrt{2}/\sqrt{\omega\mu\epsilon}$ est appelée profondeur de pénétration (à ne pas confondre

avec ∂ angle de perte). Donc $E_0(z)$ a pour expression : $E_0(z) = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}}$. Cette profondeur de pénétration δ est d'autant plus faible que la conductivité et la fréquence sont élevées. Elle signifie que lorsqu'un conducteur est parcouru par un courant sinusoïdal, ce courant se répartit, par équivalence, vers la surface du conducteur et dans

une épaisseur δ , c'est l'effet de peau. Pour le cuivre δ vaut 0,067 mm à 1 MHz, 0,67 μm à 10 GHz et 0,2 μm à 100 GHz. Il arrive un moment où la profondeur de pénétration ne représente plus que quelques Angström. Il est alors évident que l'état de surface du conducteur jouera un rôle très important à mesure que la fréquence augmente.

4. Discontinuité des champs

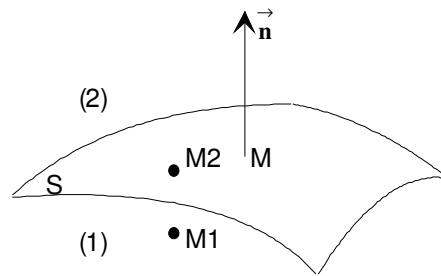


Fig. 1-2 Discontinuité des champs

On considère deux milieux (1) et (2), séparés par une surface (S) et un point M appartenant à cette surface. On définit en M la normale \vec{n} à cette surface, dirigée du milieu (1) vers le milieu (2). Soient M_1 et M_2 deux points voisins de M , appartenant respectivement au milieu (1) et au milieu (2). En général les champs sont discontinus lors de la traversée de la surface (S). L'on admettra ce fait sans démonstration et l'on prendra en compte les résultats ci-après en désignant avec l'indice t les composantes tangentiels et par l'indice n les composantes normales, ce qui conduit à écrire :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{t1} &= \vec{\mathcal{E}}_{t2} & \vec{\mathcal{B}}_{n1} &= \vec{\mathcal{B}}_{n2} \\ \vec{\mathcal{D}}_{n1} - \vec{\mathcal{D}}_{n2} &= \rho_s & n \times [\vec{\mathcal{H}}_{t2} - \vec{\mathcal{H}}_{t1}] &= \vec{j} \end{aligned}$$

ρ_s est la densité surfacique de charges électriques et \vec{j} la densité de courant surfacique. Dans le cas particulier où le milieu (1) est un conducteur parfait, la conductivité du conducteur est infinie. Comme \vec{j} ne peut devenir infini, il en résulte que $\vec{\mathcal{E}} = 0$ dans le conducteur (on a également $\vec{\mathcal{H}} = 0$). Cela conduit à $\vec{\mathcal{E}}_{t1} = \vec{\mathcal{D}}_{n1} = \vec{\mathcal{B}}_{n1} = \vec{\mathcal{H}}_{t1} = 0$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{t2} &= 0 & \vec{\mathcal{D}}_{n2} &= \rho_s \\ \vec{\mathcal{B}}_{n2} &= 0 & n \wedge \vec{\mathcal{H}}_{t2} &= \vec{j}_s \end{aligned}$$

Le champ $\vec{\mathcal{E}}$ est perpendiculaire à la surface des conducteurs, tandis que le champ $\vec{\mathcal{H}}$ est tangent aux conducteurs.

5. Conducteur cylindrique

Soit un conducteur cylindrique parcouru par un courant sinusoïdal parallèle à l'axe \vec{Oz} de densité surfacique \vec{j}_z . Les équations de Maxwell sont :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -j\omega\mu \vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{j}_z \text{ avec } \vec{E} = \sigma \vec{j}_z \end{aligned}$$

Ces équations conduisent à l'équation différentielle $\Delta \vec{j}_z - j\omega\mu\sigma \vec{j}_z = 0$

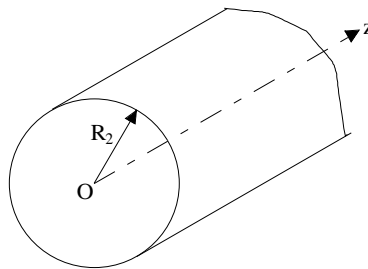


Fig. 1-3 Conducteur cylindrique

Cette équation est à résoudre en coordonnées polaires et, comme par hypothèse, \vec{j}_z est dirigé selon \vec{Oz} , il n'y a qu'une seule équation scalaire. De plus il a une symétrie de révolution ce qui conduit à une indépendance en fonction de l'angle polaire θ , finalement cette équation est :

$$\frac{d^2 j_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d j_s}{dr} - j\omega\mu\sigma j_s = 0$$

En posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$, $k^2 = \frac{2}{\delta^2}$ et $u = j^{3/2}kr$ on obtient :

$$u^2 \frac{d^2 j_s}{du^2} + u \frac{d j_s}{du} + u^2 j_s = 0$$

qui est une équation différentielle de Bessel d'ordre zéro dont la solution générale s'exprime par :

$$j_s = A J_0(u) + B Y_0(u)$$

Lorsque u tend vers zéro, $Y_0(u)$ tend vers l'infini. Comme j_s doit rester fini pour $r=0$, la solution à retenir est $j_s = A J_0(u)$. Le courant total traversant la section circulaire est donné par :