1. Rudiments de logique

1.1. *Les quantificateurs.*

$\star$ Le quantificateur universel $\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit » .
$\star$ Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit « il existe (au moins) ... » .
On notera $\exists$! pour préciser que l'on a l'existence et l'unicité.

- Attention à l'ordre des quantificateurs.
L'exemple ci-dessous nous le démontre :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m \geq n$ *signifie que pour tout entier* n*, il existe un entier* m *qui lui est supérieur, ce qui est toujours vrai.*
$\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \geq n$ *signifie qu'il existe un entier* m *qui majore tous les autres entiers, ce qui est évidemment faux.*
Toutefois deux quantificateurs identiques peuvent commuter.
- On n'utilisera pas les quantificateurs (ou autres symboles) en guise d'abréviations dans un texte.

1.2. *Éléments de logique.*

Définitions.

$\star$ La négation d'une proposition P revient à en considérer son contraire. On écrira non P.

⋆ L'implication $P \Longrightarrow Q$ signifie :

· si P alors Q

· ou pour avoir P il faut avoir Q

· ou pour avoir Q il suffit d'avoir P

⋆ L'équivalence $P \Longleftrightarrow Q$ est une double implication ($P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$) et signifie :

· P si et seulement si Q

· ou pour avoir P il faut et il suffit d'avoir Q

· ou P est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour avoir Q.

La négation de $\forall$ est $\exists$ et la négation de $\exists$ est $\forall$. Ainsi, non $(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y)$ est

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \neq y.$$

Principe de contraposition.

On a l'équivalence :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non } Q \Longrightarrow \text{non } P)$$

Le principe de contraposition est souvent utile lorsqu'il est difficile de montrer une implication $P \Longrightarrow Q$.

✓ Pour n un entier, montrer que : si n^2 est impair alors n est impair.

Solution : La contraposition de cette proposition est :

si n est pair alors n^2 est pair.

Supposons ainsi que n soit pair : $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k$.
On a alors : $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ce qui prouve bien que n^2 est pair. D'où le résultat. ■

2. Types de raisonnements

2.1. *Le raisonnement par récurrence.*

La récurrence simple.

On veut démontrer :
$\forall n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}$ est une propriété dépendant de l'entier naturel n.
La démonstration par récurrence (simple) consiste à :
► vérifier que la propriété est vraie pour la valeur n_0 : c'est l'initialisation de la récurrence ;
► puis vérifier que si la propriété est vraie pour un certain rang n (fixé quelconque), alors la propriété est vraie au rang suivant $n+1$.
Autrement dit, $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ pour n entier fixé quelconque (la propriété est dite héréditaire).
Alors, on peut conclure que pour tout $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Lorsqu'une propriété est vraie pour tout entier naturel ou pour tout entier au-delà d'un entier donné, le raisonnement par récurrence est l'un des outils à envisager systématiquement pour sa démonstration.

Même si le principe est simple à comprendre il faut prendre garde aux erreurs dans la rédaction. Il est important de bien désigner la propriété que nous avons à prouver, de bien mettre en évidence qu'au moment de l'hérédité notre entier est fixé et de bien faire apparaître l'utilisation de l'hypothèse de récurrence.

Voici un exemple illustrant ce que l'on attend de vous.

✓ $\boxed{\text{Montrer que : } \forall n \geq 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.}$

Solution : On vérifie tout d'abord que la propriété est vraie pour le 1er rang soit $n = 1$.

On a d'une part $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \times 1 - 1 = 1$ et d'autre part $1^2 = 1$ donc on a l'égalité.

Supposons ensuite la propriété vraie à l'ordre n fixé et montrons-la à l'ordre $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1$$

(d'après l'hypothèse de récurrence).

Ainsi, en reconnaissant une identité remarquable, on a $(n+1)^2$ et l'ordre $n+1$ est vrai.

En conclusion, la propriété annoncée est bien vraie pour tout $n \geq 1$. ■

La récurrence double.

La démonstration par récurrence double consiste à :

► vérifier que la propriété est vraie pour les deux premiers rangs ;

► puis vérifier que si la propriété est vraie pour les rangs n et $n+1$ (fixés quelconques), alors la propriété est vraie au rang suivant $n+2$.

Autrement dit, $(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+2)$ pour n entier fixé quelconque.

Alors, on peut conclure que pour tout $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

✓ $\boxed{\text{Montrer : } \forall n \in \mathbb{N},\ (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n \in \mathbb{N}.}$

Solution : On vérifie tout d'abord que la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ (on trouve 2 pour ces deux rangs).
Supposons que la propriété soit vraie aux ordres n et $n+1$ fixés quelconques et montrons-la à l'ordre $n+2$.
On a alors :
$(1+\sqrt{2})^{n+2} + (1-\sqrt{2})^{n+2}$
$= (1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^2$
$= (1+\sqrt{2})^n(2(1+\sqrt{2})+1) + (1-\sqrt{2})^n(2(1-\sqrt{2})+1)$
$= 2((1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1})+((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n) \in \mathbb{N}$
par hypothèse de récurrence.
Le résultat étant vrai pour l'ordre $n+2$, il est vrai pour tout $n \geq 0$. ■

La récurrence forte.

La démonstration par récurrence forte consiste à :
▶ vérifier que la propriété est vraie pour le premier rang n_0 ;
▶ puis vérifier que si la propriété est vraie jusqu'au rang n
(fixé quelconque $\geq n_0$), alors la propriété est vraie au rang suivant $n+1$.
Autrement dit, $\forall m \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \leq m \leq n$, $\mathcal{P}(m) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ pour n entier fixé quelconque.
Alors, on peut conclure que pour tout $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

✓ Soit la suite $(u_n)_n$: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}$.

Solution : On vérifie que la formule est vraie pour $n = 1$; en effet, $u_1 = \sum\limits_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 = 2^{1-1}$.

Supposons la formule vraie pour tous les ordres m tels que $1 \leq m \leq n$ où n est fixé quelconque et montrons-la à l'ordre $n+1$.

On a :
$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n.$$

L'hypothèse de récurrence n'étant valable que sur les ordres $1 \leq m \leq n$, il nous a été nécessaire de sortir le terme u_0.

La formule est donc vraie pour l'ordre $n+1$ et ainsi elle est valable pour tout $n \geq 1$. ■

2.2. Le raisonnement par l'absurde.

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement consistant à prouver la validité d'un résultat en montrant que son contraire aboutit à une absurdité.

✓ Montrer que : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Solution : Par l'absurde, on suppose qu'il existe des entiers premiers entre eux p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

En élevant au carré, on a : $2q^2 = p^2$ ce qui nous dit que p^2, et par conséquent p, est pair. On peut ainsi écrire $p = 2p'$ ce qui induit : $2q^2 = 4p'^2$ soit $q^2 = 2p'^2$.
On a alors q pair également ce qui contredit l'hypothèse initiale stipulant que p et q étaient premiers entre eux. ■

2.3. Raisonnement par analyse-synthèse.

Le raisonnement par analyse-synthèse se déroule en deux phases :
▶ on suppose l'énoncé vrai pour arriver à des conditions nécessaires
▶ puis, on démontre que ces conditions sont suffisantes.

✓ Montrer que toute fonction réelle est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, de manière unique.

Solution : Analyse : supposons une telle existence :
$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists f_1$ paire et f_2 impaire, $f = f_1 + f_2$.
Il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x)$.
Donc, on a : $f_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$
(nécessairement uniques par construction).
Synthèse : on vérifie à présent que les fonctions f_1 et f_2 sont respectivement paire et impaire. ■

On part de l'énoncé pour aboutir à des conditions nécessaires puis on vérifie qu'elles sont suffisantes.

3. Ensembles

3.1. Présentation.

Un ensemble est une collection d'objets, appelés ses éléments, considérés sans ordre, ni répétition possible.
« x est élément de l'ensemble E » se dit aussi « x appartient à E » et se note $x \in E$.

On écrit un ensemble en mettant tous ses éléments entre des accolades : $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ pour l'ensemble des entiers allant de 0 à n.
Un ensemble sans élément est dit vide ; on le note $\emptyset$.
Un ensemble avec un seul élément x est appelé singleton et noté $\{x\}$.

$\star$ Soit deux ensembles E et F. L'ensemble E est dit inclus dans l'ensemble F si tout élément de E est aussi élément de F ; on dit aussi que E est un sous-ensemble de F, ou une partie de F. On note $E \subset F$.
$\star$ L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$; il contient en particulier la partie vide $\emptyset$ et la partie pleine E.
On a : $A \in \mathcal{P}(E) \Longleftrightarrow A \subset E$.

Ainsi, pour $E = \{1, 2, 3\}$, on a

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$