Chapitre 2

Limites et comparaisons

L'essentiel du cours

Notion de base

Les différentes configurations

Soit f une application définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$.

⋆ On dit que f admet l pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

⋆ On dit que f admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en a si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A$$

$$(\text{resp. } f(x) \leq A)$$

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

⋆ On dit que f admet l pour limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq M \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$(\text{resp. } x \leq M \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$).

⋆ On dit que f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq M \Longrightarrow f(x) \geq A$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour la dernière configuration, si la limite est en $-\infty$ on change $x \geq M$ en $x \leq M$ et si la limite vaut $-\infty$ on change $f(x) \geq A$ en $f(x) \leq A$.

Limites à gauche et à droite

$\star$ On dit que f admet l pour limite à gauche de a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ a - \eta \leq x \leq a \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$.

$\star$ On dit que f admet l pour limite à droite de a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ a \leq x \leq a + \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

Le conseil du prof :
De manière générale, on a l'équivalence :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

Si de plus f est définie en a alors ces limites sont égales à $f(a)$.

La propriété d'unicité

Si f admet une limite en a alors elle est nécessairement unique.

Opérations sur les limites

Pour les limites finies

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ des applications, $a \in I \cup \{\pm\infty\}$ et $l, l', \alpha \in \mathbb{R}$.

$\star$ La limite est compatible avec la combinaison linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \\ g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l' \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \alpha l + l'$$

$\star$ La limite est compatible avec le produit :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \end{array}\right. \Longrightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} ll'$$

$\star$ La limite est compatible avec le quotient :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \neq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{l}{l'}$$

Pour les limites infinies

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ des applications, $a \in I \cup \{\pm\infty\}$ et $l \in \mathbb{R}$.

$\star$ Pour la somme :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } -\infty) \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } -\infty) \end{array}\right. \Longrightarrow f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } -\infty)$$

Par contre, il y a une forme indéterminée si les limites infinies de f et g sont opposées.

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } -\infty) \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \end{array}\right. \Longrightarrow f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } -\infty)$$

$\star$ Pour le produit :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty \end{array}\right. \Longrightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty$$

(en respectant la règle des signes)

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \neq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty$$

(en respectant la règle des signes).
Par contre, il y a une forme indéterminée si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

⋆ Pour l'inverse :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty \Longrightarrow \frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0, \quad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{l}$$

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0^+ \text{ (resp. } 0^-) \Longrightarrow \frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } 0^+)$$

Pour la composition de limites

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ (avec $f(I) \subset J$) deux applications. Pour a, b, l des valeurs finies ou infinies on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \\ g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} l \end{array} \right. \Longrightarrow g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$$

Limites et inégalités

Du strict au large

Si au voisinage de a (fini ou infini) $f(x) > g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Théorème d'encadrement

Si au voisinage de a (fini ou infini), on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ alors on en déduit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l \Longrightarrow \lim_{x\to a} g(x) = l$$

Théorème de comparaison

$$\star \left\{ \begin{array}{l} \text{Au voisinage de } a,\ f(x) \leq g(x) \\ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \end{array} \right. \Longrightarrow g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty.$$

$$\star \left\{ \begin{array}{l} \text{Au voisinage de } a, \ f(x) \leq g(x) \\ g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty.$$

Fonctions négligeables

Définition

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I telles que
$\forall x \in I - \{a\}, \ g(x) \neq 0$ (a peut être infini).
On dira que f est négligeable devant g au voisinage de a si :

$$\exists \varepsilon : I \to \mathbb{R}, \ \forall x \in I, \ f(x) = \varepsilon(x) g(x)$$

où $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.
On notera alors $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ ou plus simplement $f \underset{a}{=} o(g)$ (notation de Landau).

Le conseil du prof :
Cette définition nous permet d'affirmer que : $x^k \times o(x) = o(x^{k+1})$ *et pour* $k \geq 1$, $\dfrac{o(x^k)}{x} = o(x^{k-1})$.

Négligeabilité et limite

Avec les notations précédentes, on a l'équivalence :

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Le conseil du prof :
Ainsi, dire que $f \underset{a}{=} o(1)$ *signifie que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Négligeabilités classiques

$\star$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta) \Longleftrightarrow \alpha < \beta$ et $x^\alpha \underset{0^+}{=} o(x^\beta) \Longleftrightarrow \alpha > \beta$.
$\star$ $\forall \alpha > 0,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ (\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha)$.
$\star$ $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta > 0,\ x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x})$.

Le conseil du prof :
On en déduit alors les croissances comparées suivantes :
$\dfrac{e^x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad ; \quad xe^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ; \quad \dfrac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ; \quad x\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
Attention aux fausses croissances comparées comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2}$ *où il faut changer la variable et poser* $X = x^2$ *; on a alors* $\lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$.

Fonctions équivalentes

Définition

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I telles que $\forall x \in I - \{a\},\ f(x),\ g(x) \neq 0$ (a peut être infini).
On dira que f est équivalente à g au voisinage de a si :

$$\exists \varepsilon : I \to \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = (1+\varepsilon(x))g(x)$$

où $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
On notera alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou plus simplement $f \underset{a}{\sim} g$.

Équivalence et limite

Avec les notations précédentes, on a l'équivalence :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Le conseil du prof :
Avec ces caractérisations, on peut alors donner un lien entre la négligeabilité et l'équivalence de fonctions :

$$f \underset{a}{\sim} g \Longleftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(g) \Longleftrightarrow g - f \underset{a}{=} o(f)$$

Équivalence et opérations

$\star$ Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.

$\star$ Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\forall n \geq 1,\ f^n \underset{a}{\sim} g^n$.

$\star$ Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$ $(f, g \neq 0$ au voisinage de $a)$.

Le conseil du prof :
L'équivalent de fonction n'est pas compatible avec l'addition comme nous le montre l'exemple suivant : $e^x + e^{2x} \underset{x \to -\infty}{\sim} e^x$ *et* $-e^x + e^{3x} \underset{x \to -\infty}{\sim} -e^x$ *mais pour autant on a* $(e^x + e^{2x}) + (-e^x + e^{3x}) \underset{x \to -\infty}{\not\sim} 0$ *(la somme est équivalente à* e^{2x}*).*
De même, les équivalents ne sont pas compatibles avec les fonctions exponentielle et logarithme.

Équivalents classiques

$\star$ Un polynôme est équivalent au voisinage de $+\infty$ à son terme de plus haut degré.

$\star$ Un polynôme est équivalent au voisinage de 0 à son terme de plus bas degré.

$\star$ $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

$\star$ $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$

$\star$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (1 + x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$