1. Types de raisonnements

1.1. *Le raisonnement par récurrence.*

La récurrence simple.

On veut démontrer :
$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}$ est une propriété dépendant de l'entier naturel n.
La démonstration par récurrence (simple) consiste à :
► vérifier que la propriété est vraie pour la valeur n_0 : c'est l'initialisation de la récurrence
► puis vérifier que si la propriété est vraie pour un certain rang n (fixé quelconque), alors la propriété est vraie au rang suivant $n+1$.
Autrement dit, $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ pour n entier fixé quelconque (la propriété est dite héréditaire).
Alors, on peut conclure que pour tout $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Lorsqu'une propriété est vraie pour tout entier naturel ou pour tout entier au-delà d'un entier donné, le raisonnement par récurrence est l'un des outils à envisager systématiquement pour sa démonstration.

Même si le principe est simple à comprendre il faut prendre garde aux erreurs dans la rédaction. Il est important de bien désigner la propriété que nous avons à prouver, de bien mettre en évidence qu'au moment de l'hérédité notre entier est fixé et de bien faire apparaître l'utilisation de l'hypothèse de récurrence.

Voici un exemple illustrant ce que l'on attend de vous.

✓ Montrer que : $\forall n \geq 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Solution : On vérifie tout d'abord que la propriété est vraie pour le 1er rang soit $n = 1$.
On a d'une part $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \times 1 - 1 = 1$ et d'autre part $1^2 = 1$ donc on a l'égalité.
Supposons ensuite la propriété vraie à l'ordre n fixé et montrons-la à l'ordre $n+1$.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1$ (d'après l'hypothèse de récurrence).

Ainsi, en reconnaissant une identité remarquable, on a $(n+1)^2$ et l'ordre $n+1$ est vrai.
En conclusion, la propriété annoncée est bien vraie pour tout $n \geq 1$. ■

La récurrence double.

La démonstration par récurrence double consiste à :
▶ vérifier que la propriété est vraie pour les deux premiers rangs
▶ puis vérifier que si la propriété est vraie pour les rangs n et $n+1$ (fixés quelconques), alors la propriété est vraie au rang suivant $n+2$.
Autrement dit, $(\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+2)$ pour n entier fixé quelconque.
Alors, on peut conclure que pour tout $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

✓ $\boxed{\text{Montrer que : } \forall n \in \mathbb{N},\ (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n \in \mathbb{N}.}$

Solution : On vérifie tout d'abord que la propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$ (on trouve 2 pour ces deux rangs).
Supposons que la propriété soit vraie aux ordres n et $n+1$ fixés quelconques et montrons-la à l'ordre $n+2$.
On a alors :
$(1+\sqrt{2})^{n+2} + (1-\sqrt{2})^{n+2} = (1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^2$
$= (1+\sqrt{2})^n(2(1+\sqrt{2})+1) + (1-\sqrt{2})^n(2(1-\sqrt{2})+1)$
$= 2((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}) + ((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n) \in \mathbb{N}$
par hypothèse de récurrence.
Le résultat étant vrai pour l'ordre $n+2$, il est vrai pour tout $n \geq 0$. ■

La récurrence forte.

La démonstration par récurrence forte consiste à :
▶ vérifier que la propriété est vraie pour le premier rang n_0
▶ puis vérifier que si la propriété est vraie jusqu'au rang n
(fixé quelconque $\geq n_0$), alors la propriété est vraie au rang suivant $n+1$.
Autrement dit, $\forall m \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \leq m \leq n$, $\mathcal{P}(m) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ pour n entier fixé quelconque.
Alors, on peut conclure que pour tout $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

✓ Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

Solution : On vérifie que la formule est vraie pour $n = 1$; en effet, $u_1 = \sum\limits_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 = 2^{1-1}$.

Supposons la formule vraie pour tous les ordres m tels que $1 \leq m \leq n$ où n est fixé quelconque et montrons-la à l'ordre $n+1$.

On a : $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 + \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n$.

L'hypothèse de récurrence n'étant valable que sur les ordres $1 \leq m \leq n$, il nous a été nécessaire de sortir le terme u_0.

La formule est donc vraie pour l'ordre $n+1$ et ainsi elle est valable pour tout $n \geq 1$. ■

1.2. Le raisonnement par l'absurde.

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement consistant à prouver la validité d'un résultat en montrant que son contraire aboutit à une absurdité.

✓ Montrer que : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Solution : Par l'absurde, on suppose qu'il existe des entiers premiers entre eux p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ (la fraction est dite irréductible).

En élevant au carré, on a : $2q^2 = p^2$ ce qui nous dit que p^2, et par conséquent p, est pair. On peut ainsi écrire $p = 2p'$ ce qui induit : $2q^2 = 4p'^2$ soit $q^2 = 2p'^2$.

On a alors q pair également ce qui contredit l'hypothèse initiale stipulant que p et q étaient premiers entre eux. ■

1.3. Le raisonnement par analyse-synthèse.

Le raisonnement par analyse-synthèse se déroule en deux phases :
- ▶ on suppose l'énoncé vrai pour arriver à des conditions nécessaires
- ▶ puis, on démontre que ces conditions sont suffisantes.

✓ Montrer que : toute fonction réelle est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, de manière unique.

Solution : Analyse : supposons une telle existence, on a :
$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\exists f_1$ paire et f_2 impaire, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x)$.
Donc, on a : $f_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ (elles seront donc nécessairement uniques par construction).
Synthèse : on vérifie à présent que les fonctions f_1 et f_2 sont respectivement paire et impaire (ce qui est immédiat). ■

2. Ensembles, parties d'un ensemble

2.1. *Présentation.*

Un ensemble est une collection d'objets, appelés ses éléments, considérés sans ordre, ni répétition possible.
« x est élément de l'ensemble E » se dit aussi « x appartient à E » et se note $x \in E$.

On écrit un ensemble en mettant tous ses éléments entre des accolades :
$\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ pour l'ensemble des entiers allant de 0 à n.
Un ensemble sans élément est dit vide ; on le note $\emptyset$.

$\star$ Soit deux ensembles E et F. L'ensemble E est dit inclus dans l'ensemble F si tout élément de E est aussi élément de F ; on dit aussi que E est un sous-ensemble de F, ou une partie de F. On note $E \subset F$.
$\star$ L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$; il contient en particulier la partie vide $\emptyset$ et la partie pleine E.
On a : $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

Ainsi, pour $E = \{1, 2, 3\}$, on a

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

2.2. *Opérations sur les ensembles.*

Les symboles.
On considère E un ensemble et A, B des sous-ensembles de E.

$\star$ Le complémentaire de A est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A ; on le note $\overline{A}$.
$\star$ La réunion des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B ; on la note $A \cup B$.
$\star$ L'intersection des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B ; on la note $A \cap B$.

⋆ La différence des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et pas à B ; on la note $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
⋆ La différence symétrique de A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B mais pas à A et à B ; on la note $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

Les propriétés.
On notera A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E.

⋆ La commutativité : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$
⋆ L'associativité : $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ et $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$
⋆ La distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
⋆ La complémentarité : $\overline{\emptyset} = E$, $\overline{E} = \emptyset$ et $\overline{\overline{A}} = A$
$A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
⋆ Les lois de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

✓ Montrer que : $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$.

Solution : Pour cela, nous allons montrer une autre écriture de $A\Delta B$.
$A\Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = ((A \cup B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup B) \cap \overline{B})$
$= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})$ (car $A \cap \overline{A} = B \cap \overline{B} = \emptyset$).
Ainsi, avec $\overline{\overline{X}} = X$, on obtient le résultat attendu. ■

2.3. Système complet.

On appelle système complet d'un ensemble E toute famille $\{A_i; i \in I\}$ (finie ou dénombrable) de parties de E telle que :
⋆ $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset$
⋆ $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = E$
⋆ $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

2.4. Produit cartésien.

Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.
Dans le cas où $E = F$, on pourra noter $E \times E = E^2$.

La définition se généralise naturellement à un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.

Il faudra tenir compte de l'ordre donné dans le produit cartésien ; par exemple une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ne l'est pas nécessairement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

3. Applications

3.1. Généralités.

La définition.

Une application f est une relation entre deux ensembles pour laquelle chaque élément x du premier (appelé ensemble de départ) est associé à un unique élément $y = f(x)$ du second (ensemble d'arrivée).
L'élément x est appelé antécédent de y ; l'élément $y = f(x)$ est appelé image de x.

Il y a une différence - dont on peut se passer en première lecture - entre la notion d'application et celle de fonction. L'application nous précise que tout élément de l'ensemble de départ a une image (et une seule) alors que l'on n'impose rien pour l'ensemble de départ d'une fonction ; ainsi, on pourra parler de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ mais pour l'application, il nous faudra considérer f sur $\mathbb{R}_+$.

Restriction d'une application.

On considère une application $f : E \longrightarrow F$ et $A \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle restriction de f à A l'application, notée $f_{|A}$, définie sur A par : $\forall x \in A,\ \ f_{|A}(x) = f(x)$.

La restriction (unique pour un sous-ensemble donné) est donnée pour faire apparaître une propriété intéressante sur la nouvelle application. Ainsi, l'application $f : x \mapsto x^2$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ alors que sa restriction à $\mathbb{R}_+$, $f_{|\mathbb{R}_+}$, l'est.

Prolongement d'une application.

On considère une application $f : E \longrightarrow F$ et B un ensemble tel que $E \subset B$.
On appelle prolongement de f à B toute application $\widetilde{f}$ définie sur B par :

$$\forall x \in E,\ \ f(x) = \widetilde{f}(x).$$

Pour une application f et un ensemble B donnés, le prolongement n'est pas unique (sauf exception).