Révisions

01

I. ÉNONCÉS DES EXERCICES

1.01 • (Etude d'une suite définie par une somme)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

◇

1.02 • (Equivalent d'une suite)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

1°) Démontrer l'encadrement : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

2°) En déduire un encadrement de u_n.

3°) Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

◇

1.03 • (Etude d'une suite définie implicitement)

Pour $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n : x \longmapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$$

1°) Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Nous noterons x_n cette solution.

2°) Etudier les variations de la suite (x_n).

3°) Montrer la convergence de la suite (x_n).

◇

1.04 • (Calcul d'une limite à l'aide d'un encadrement)

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{pn} \dfrac{1}{k}$.

1°) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(1+x) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

2°) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

◇

1.05 • (Etudes de suites récurrentes)

Dans chacun des cas suivants, étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1°) $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$.

2°) $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2u_n + 1}$.

3°) $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

$\diamond$

1.06 • • (Résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 2)
Soient a et b deux réels.

1°) Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y = ax + b$.

2°) En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = a|x| + b$.

$\diamond$

1.07 • (Inégalités et encadrements)
Démontrer les inégalités ou encadrements suivants :

1°) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$.

2°) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leqslant \sqrt{1 + x}$.

3°) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

$\diamond$

1.08 • • (Dérivation d'une intégrale à paramètre)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2 x} dt$.

1°) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $h \in [-1, 1]$, on a :

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 h t^2 \mathrm{e}^{t^2 x} dt + \int_0^1 \mathrm{e}^{t^2 x} \big(\mathrm{e}^{t^2 h} - t^2 h - 1\big) dt$$

3°) Montrer que : $\forall\, u \in [-1, 1],\ 0 \leqslant \mathrm{e}^u - 1 - u \leqslant \mathrm{e}\dfrac{u^2}{2}$.

4°) En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^1 t^2 \mathrm{e}^{t^2 x} dt$$

$\diamond$

1.09 • • • (Développement asymptotique d'une suite)

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\big]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\big[$. On désigne par x_n cette unique solution.

2°) Etablir successivement les trois résultats suivants :

a) $x_n \underset{(n \to +\infty)}{\sim} n\pi$.

b) $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1}{x_n}\Big)$.

c) $x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} \underset{(n \to +\infty)}{\sim} -\dfrac{1}{n\pi}$.

3°) En déduire l'existence de trois réels a, b et c tels que :

$$x_n \underset{(n\to+\infty)}{=} an + b + \frac{c}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

$\diamond$

1.10 • • (Etude d'une fonction définie par une intégrale)

Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t}{t^4+t^2+1}\,dt$.

1°) Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

2°) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.

3°) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En procédant au changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, exprimer $F\big(\frac{1}{x}\big)$ à l'aide de $F\big(\frac{x}{2}\big)$.

4°) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

$\diamond$

1.11 • • (Etude du caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction)

On considère la fonction f définie sur $[0,1[$ par :

$$\forall\, t \in [0,1[, f(t) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in\,]0,1[\\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1°) Montrer que f est continue sur $[0,1[$.

2°) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$. Que vaut $f'(0)$?

3°) Etudier les variations de f et donner sa représentation graphique.

$\diamond$

1.12 • • (Etude d'une fonction réciproque)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \text{Arccos}(x) - \sqrt{1-x^2}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition D de f puis étudier sa continuité et sa dérivabilité sur D.

2°) Démontrer que f réalise une bijection de D sur un ensemble J à préciser.

3°) Tracer les courbes représentatives de la fonction f et de sa fonction réciproque g.

4°) Etudier la dérivabilité de g.

$\diamond$

1.13 • • (Détermination d'un équivalent d'une somme)

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2-1}\big)$.

1°) Etudier la dérivabilité de f sur $[1,+\infty[$.

2°) Etablir que : $\forall\, k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{\sqrt{(k+1)^2-1}} \leqslant f(k+1) - f(k) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}}$.

3°) Déduire de la question précédente un encadrement de la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 2$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$. Cette suite est-elle convergente ?

4°) Déterminer un équivalent de (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

$\diamond$

$\boxed{\textbf{1.14}}$ • (Intégrales et limites)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(x)\big)^{\frac{1}{n}} dx$.

1°) Démontrer que : $\forall\, x \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

2°) Etablir que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

3°) La suite $(I_n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

$\diamond$

$\boxed{\textbf{1.15}}$ • (Racine d'une fonction polynomiale)

Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto x^n + ax - a$$

1°) Etudier les variations de f_n pour $n \geqslant 1$.

2°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in [0,1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

3°) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

$\diamond$

$\boxed{\textbf{1.16}}$ • • (Etude d'une fonction périodique)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T > 0$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1°) Montrer que f est bornée et qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$f(\alpha) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \big(f(x)\big)\ \ ;\ \ f(\beta) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \big(f(x)\big)$$

2°) Que peut-on dire de $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$?

3°) Soit $a \in \mathbb{R}$. Ecrire l'équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.

4°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Existe-t-il un réel a tel que $\mathcal{C}$ et T_a se coupent au point M_a de coordonnées $\big(a+\lambda, f(a+\lambda)\big)$?

$\diamond$

$\boxed{\textbf{1.17}}$ • (Calculs de limites)

Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\sin(x)}}{x^3}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-a}}$ $(a > 0)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - x$.

$\diamond$

$\boxed{\textbf{1.18}}$ • • (Etude d'une suite définie par récurrence)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{u_n} + 1}$.

1°) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$.

2°) Montrer qu'il existe un unique réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{\mathrm{e}^\lambda}{\mathrm{e}^\lambda + 1} = \lambda$. Démontrer que $\lambda \in]0, 1[$.

3°) Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \lambda| \leqslant \frac{1}{4}\, |u_n - \lambda|$.

4°) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

$\diamond$

$\boxed{\textbf{1.19}}$ • (Calcul d'une intégrale)
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$) vérifiant :

$$\forall\, x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x)$$

1°) Que peut-on dire du graphe de la fonction f ?

2°) Démontrer que : $\displaystyle\int_a^b x f(x)\, dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\, dx$.

3°) En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$.

$\diamond$

$\boxed{\textbf{1.20}}$ • • (Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1)
On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $xy' + 2y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

1°) Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

2°) Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$.

3°) Montrer qu'il existe une unique fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

4°) Soit f la fonction définie à la question précédente. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$.

$\diamond$

$\boxed{\textbf{1.21}}$ • • (Résolution d'une équation fonctionnelle)
On désigne par E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(2x) = \int_0^x (x - t) f(2t) dt + 1$$

1°) Soit $f \in E$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer alors f'.

b) Démontrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.

2°) Déterminer l'ensemble E.

$\diamond$

$\boxed{\textbf{1.22}}$ • • • (Etude d'une suite de fonctions)
On considère la fonction $J_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto \cos(t)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction J_n par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, J_{n+1}(t) = \int_0^t J_n(u)du$$

1°) Déterminer les fonctions J_i pour $i \in [\![2, 6]\!]$.

2°) Etablir que : $\forall n \geqslant 1, \forall t \in \mathbb{R}, |J_{n+1}(t)| \leqslant \dfrac{|t|^n}{n!}$.

3°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction P_n suivante est polynômiale :
$P_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto J_n(t) - \cos\left(t - (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$

4°) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, P_{2k+1}(t) = (-1)^{k+1} \sum\limits_{j=0}^{k-1} (-1)^j \dfrac{t^{2j}}{(2j)!}$.

5°) Démontrer que pour tout réel t, on a l'égalité :

$$\lim_{k \to +\infty} \left[1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!}\right] = \cos(t)$$

◇

1.23 • • • (Exercice de synthèse)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t^3 + t$.

1°) a) Déterminer les variations de f.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque. On note g cette fonction. Ainsi, pour tout nombre réel x :

$$\big(g(x)\big)^3 + g(x) = x$$

c) Montrer que la fonction g est strictement croissante et impaire.

d) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer g' en fonction de g.

e) En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

f) Etudier la convexité de g.

g) Construire les courbes représentatives de f et g dans un même repère.

2°) a) Démontrer que g admet en 0 un développement limité à tout ordre.

b) Expliciter ce développement à l'ordre 3.

c) Montrer que $g(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt[3]{x}$.

II. INDICATIONS

1.01 Montrer que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

1.03 Pour la question **2)**, on pourra chercher le signe de $f_n(x_{n+1})$ en utilisant le fait que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

1.04 Pour la question **1)**, on pourra faire une étude de fonctions, ou bien utiliser la formule des accroissements finis. Pour la question **2)**, on pourra utiliser l'encadrement de la question **1)** avec $x = k$ puis sommer les encadrements obtenus.

1.07 Pour chaque inégalité, on pourra appliquer la formule de Taylor-Lagrange à une fonction bien choisie.

1.08 Pour la croissance de f, on pourra revenir à la définition de cette notion. Pour la question **3)**, on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange.

1.09 Pour la question **1)**, on pourra étudier la fonction $x \mapsto \tan(x) - x$ sur l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$. Pour la question **2) b)**, on pourra appliquer la fonction Arctan à l'égalité $\tan(x_n) = x_n$ puis simplifier l'égalité obtenue.

1.11 Pour montrer la dérivabilité de f en 0 à la question **2)**, on pourra utiliser le théorème de limite de la dérivée.

1.13 A la question **1)**, pour démontrer que f n'est pas dérivable en 1, on pourra utiliser le théorème de la limite de la dérivée. La question **2)** pourra être démontrée en utilisant la formule des accroissements finis. Pour encadrer S_n dans la question **3)**, on pourra sommer les encadrements obtenus dans la question **2)**.

1.14 La question **a)** pourra être démontrée en utilisant des arguments de convexité. Pour la question **3)**, on pourra revenir à la définition de la limite.

1.15 Pour montrer la convergence de (u_n), on pourra montrer sa monotonie en étudiant le signe de $f_n(u_{n+1})$. Pour le calcul de la limite, on pourra raisonner par l'absurde en supposant que la limite de (u_n) est strictement inférieure à 1.

1.16 Pour la question **4)**, on pourra montrer que le problème revient à s'intéresser à l'éventuelle annulation de la fonction $a \mapsto f(a+\lambda) - f(a) - \lambda f'(a)$.

1.18 A la question **2)**, on pourra étudier la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - x(\mathrm{e}^x + 1)$. La question **3)** peut être résolue à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

1.19 A la question **2)**, on pourra effectuer un changement de variable pour exploiter la propriété vérifiée par f. A la question **3)**, on pourra essayer d'appliquer la question **2)** avec une fonction f et des réels a et b judicieusement choisis.

1.20 Pour la question **3)**, on pourra raisonner par conditions nécessaires et suffisantes. Pour la question **4)**, on pourra faire une intégration par parties et utiliser l'équation différentielle (E).

1.21 Pour la question **1) a)**, on pourra utiliser la linéarité de l'intégrale et appliquer le théorème de première année sur la dérivation des fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_0^{u(x)} g(t)\,dt$.

1.22 Pour les questions **2)**, **3)** et **4)**, on pourra raisonner par récurrence. Pour la question **5)**, on pourra combiner les réponses **2)** et **4)**.

1.23 Pour les questions **2) a)** et **2) b)**, on pourra utiliser la formule de Taylor-Young. Pour la question **2) c)**, on pourra se servir de l'égalité rappelée dans la question **1) b)**.

III. CORRIGÉS DÉTAILLÉS DES EXERCICES

Corrigé 1.01

Rappelons qu'une suite (u_n) est convergente si et seulement si les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et ont la même limite. Nous allons ici démontrer que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, ce qui permettra de conclure.

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{2n+2} - u_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant 0\end{aligned}$$

La suite (u_{2n}) est donc croissante. Par ailleurs :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$
$$= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} \leqslant 0$$

La suite (u_{2n+1}) est donc décroissante.
Enfin, on constate que :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{2n+1} - u_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc adjacentes, et par conséquent, ont la même limite. Il en résulte que la suite (u_n) converge.

Corrigé 1.02

1°) Considérons $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [k, k+1]$, on peut écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$$

En intégrant cette inégalité entre k et $k+1$, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\,dx$$

ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

2°) Nous allons sommer les encadrements précédents lorsque k varie de 1 à n. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

En effectuant le changement de variable $k' = k+1$ dans la première somme, et en utilisant la relation de Chasles dans la somme du milieu, on en déduit alors :

$$\sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k'}} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$u_{n+1} - 1 \leqslant \left[2\sqrt{x}\right]_1^{n+1} \leqslant u_n, \text{ soit : } u_{n+1} - 1 \leqslant 2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n$$

Il en résulte :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1}$$

3°) En divisant chaque membre de l'encadrement précédent par $2\sqrt{n}$, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{u_n}{2\sqrt{n}} \leqslant 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Le membre de gauche et le membre de droite tendent vers 1, donc, le théorème d'encadrement permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{2\sqrt{n}} = 1$. En conclusion :

$$\boxed{u_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} 2\sqrt{n}}$$