1

Les méthodes en Algèbre

Pour l'exercice d'algèbre, les candidats ont rarement les méthodes les plus fines ou les plus rapides ; cela les entraîne alors dans de lourds calculs ou dans des justifications fleuves.
Le niveau théorique exigé est de plus en plus important au fil des années, ce n'est donc pas un exercice à prendre à la légère...

Voici la liste des thémes abordés à travers les méthodes :

- *1. Les systèmes linéaires*
- *2. Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples*
- *3. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels*
- *4. Familles libres, génératrices et bases*
- *5. Applications linéaires*
- *6. Noyau et image d'une application linéaire*
- *7. Applications linéaires bijectives*
- *8. Calcul de l'inverse d'une matrice*
- *9. Puissance d'une matrice*
- *10. Application du calcul de A^n*
- *11. Valeurs propres et vecteurs propres*
- *12. Diagonalisation*

1. Systèmes linéaires

Plusieurs situations peuvent se présenter :

Le système est triangulaire

Si le système est triangulaire, c'est-à-dire sous la forme

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \ddots \qquad\qquad \vdots \\ a_{nn}x_n = y_n \end{array}\right.$$

où les $a_{ii} \neq 0$; alors en remontant le système, on en déduit une solution unique pour les x_i.

Exemple : Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{r} -2x + 3y + z = 1 \\ y - 2z = -1 \\ 2z = 8 \end{array}\right.$

Solution : Avec la dernière équation, on a $z = 4$; en remontant, on en déduit : $y - 8 = -1$ et donc $y = 7$.
Et avec la 1re équation, on trouve : $-2x + 21 + 4 = 1$ soit $x = 12$.
En résumé, ce système a une unique solution qui est : $(12, 7, 4)$.

Le système est plus simple qu'il n'y paraît

Avant de se jeter à corps perdu dans une résolution mécanique, un petit coup d'œil sur les coefficients de ce système peut se révéler très utile.
Par une simple somme de deux équations (ou plus), on peut, parfois, extraire la valeur de l'une des inconnues (et procéder ensuite à une substitution).

Exemple : Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{r} 4x - 3y + 2z = -1 \\ -2x - 3y + z = 1 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \end{array}\right.$

Solution : Avec l'opération $(1) + (2) + (3)$, on obtient : $-4y = 0$ et donc $y = 0$.

Par substitution, il vient : $\left\{\begin{array}{l} 4x + 2z = -1 \\ -2x + z = 1 \\ -2x - 3z = 0 \end{array}\right.$ et on en déduit avec les

deux dernières équations (par différence) que : $z = \dfrac{1}{4}$ et $x = -\dfrac{3}{8}$.
Et on vérifie que ces valeurs valident bien la 1re équation.
En résumé, ce système a l'unique solution : $\left(-\dfrac{3}{8}, 0, \dfrac{1}{4}\right)$.

Le cas général : la méthode de Gauss

L'idée est de transformer un système linéaire en un système en escalier (ou échelonné) à l'aide d'opérations élémentaires sur les équations du système.
Ces opérations élémentaires sont :

- ⋆ la permutation entre 2 équations : $L_i \leftrightarrow L_j$
- ⋆ la dilatation d'une équation : $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- ⋆ la transvection d'une équation : $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$

L'obtention de la forme en escalier repose sur le principe d'élimination progressive des inconnues. Pour l'élimination de l'inconnue x_i on choisira une équation où le coefficient (appelé pivot) devant x_i est non nul.

Exemple 1 : Résoudre le système : $(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -2x + 2y + 3z = 0 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$

Solution : On a par la méthode de Gauss :

$$(\mathcal{S}) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ \quad y + 2z = 1 \\ -y + 5z = -5 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\iff} \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ \quad y + 2z = 1 \\ \quad 7z = -4 \end{cases}.$$

On « remonte » alors les équations pour obtenir la solution unique :

$$\left(\frac{9}{7}, \frac{15}{7}, -\frac{4}{7}\right).$$

Exemple 2 : Résoudre le système : $(\mathcal{S})\ \begin{cases} -3x - y + 4z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ -3x + y + 11z = 2 \end{cases}$

Solution : Les opérations de Gauss nous donnent :

$$(\mathcal{S}) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} -3x - y + 4z = 1 \\ \quad 2y + 7z = 1 \\ \quad 2y + 7z = 1 \end{cases}$$

Comme les deux dernières équations sont colinéaires (même égales), on peut en supprimer une des deux : $\begin{cases} -3x - y + 4z = 1 \\ \quad 2y + z = 1 \end{cases}$

On ne peut continuer les opérations de Gauss et on en déduit que l'on a une infinité de solutions :

$$\{\left(\frac{-1 + 5z}{2}, \frac{1 - 7z}{2}, z\right),\ z \in \mathbb{R}\}$$

(pour cela, on a écrit les différentes inconnues en fonction de z mais on aurait pu choisir une autre dépendance).

Exemple 3 : Résoudre le système : $(\mathcal{S})\ \begin{cases} -3x - y + 2z = 0 \\ 6x - y - z = 1 \\ 6x - 4y + 2z = 4 \end{cases}$

Solution : Par opérations de Gauss, on obtient :

$$(\mathcal{S}) \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\iff} \begin{cases} -3x - y + 2z = 0 \\ \quad -3y + 3z = 1 \\ \quad -6y + 6z = 4 \end{cases}$$

On constate alors que les deux dernières équations sont incompatibles, on peut alors conclure qu'il n'y a pas de solution à ce système.

Le cas des systèmes paramétrés

> La démarche est similaire à celle de la méthode de Gauss à la différence que l'on doit prendre un pivot non paramétré (quitte à échanger des équations).
> Si l'on est toutefois contraint à le faire, on entamera une discussion sur le paramètre (suivant qu'il soit nul ou non).

Ces systèmes paramétrés auront toute leur importance dans la recherche des valeurs propres d'une matrice.

Exemple : Résoudre le système : $(\mathcal{S})\left\{\begin{array}{l} mx+y+(m-1)z=m \\ x+y+z=m \\ x+my+z=1 \end{array}\right.$

où $m \in \mathbb{R}$.

Solution : Tout d'abord, il nous faut prendre un pivot non paramétré ; pour cela, on commence par permuter les 2^{res} équations. Les opérations de Gauss amèneront une discussion sur le paramètre.

$$(\mathcal{S}) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=m \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+y+z=m \\ (1-m)y-z=m-m^2 \\ (m-1)y=1-m \end{array}\right. .$$

La dernière équation nous amène à une discussion sur le paramètre m.

<u>*1^er^ cas*</u> : $m=1$. Le dernier système donne : $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ -z=0 \\ 0=0 \end{array}\right.$ et donc les solutions sont $\{(x,1-x,0), x \in \mathbb{R}\}$.

<u>*2^e^ cas*</u> : $m \neq 1$. La dernière équation nous donne la valeur de y : $y=-1$ et en « remontant » on a l'unique solution : $(m-m^2+2,-1,m^2-1)$.

2. Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples

Le but de la méthode est de décomposer une fraction rationnelle $f = \dfrac{P}{Q}$ (où P et Q sont des polynômes premiers entre eux) en une somme de fractions rationnelles « plus simples » (la forme étant donnée dans l'énoncé). On peut présenter deux méthodes classiques pour y arriver.

On réduit tous les termes au même dénominateur.

> On réduit au même dénominateur tous les termes de la partie fractionnaire de f, et on identifie avec la fraction initiale.
> L'énoncé nous proposera la décomposition attendue (ou en tous les cas sa forme).

Exemple : Soit la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x+2)}$; il nous faut trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+2}$ pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$.

Solution : On part de la forme proposée et on réduit tout au même dénominateur :
$\dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+2} = \dfrac{(b+c)x^2 + (a+b-2c)x + (2a-2b+c)}{(x-1)^2(x+2)}$
et on l'identifie à la forme initiale de f, ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-2c=0 \\ 2a-2b+c=1 \end{cases}.$$

On trouve alors : $a = \dfrac{2}{3},\ b = \dfrac{4}{9},\ c = \dfrac{5}{9}$, d'où la décomposition de f :

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{2/3}{(x-1)^2} + \frac{4/9}{x-1} + \frac{5/9}{x+2}.$$

Remarque : cette méthode donne souvent lieu à des calculs assez lourds ; il est conseillé, chaque fois que cela est possible, de l'éviter.

On calcule les coefficients de la décomposition en les isolant.

Pour isoler le coefficient α se trouvant dans la fraction $\dfrac{\alpha}{x-a}$ d'une décomposition en éléments simples, on pensera à multiplier toute la relation par $x-a$ puis à prendre $x=a$. On répète l'opération pour chacun des coefficients à déterminer.

Exemple 1 : Soit à décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$ pour $x \neq 2$ et $x \neq -3$; il nous faut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}.$$

Solution : On a les valeurs : $a = (x-2)f(x)\Big|_{x=2} = \dfrac{x}{x+3}\Big|_{x=2} = \dfrac{2}{5}$,
et $b = (x+3)f(x)\Big|_{x=-3} = \dfrac{x}{x-2}\Big|_{x=-3} = \dfrac{3}{5}$.
D'où la décomposition :

$$\frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{2/5}{x-2} + \frac{3/5}{x+3}.$$

Exemple 2 : La tâche peut s'avérer plus délicate s'il on a dans la décomposition un terme avec un carré.
Prenons l'exemple $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$.
Solution : On a les valeurs : $c = (x+1)f(x)\Big|_{x=-1} = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}\Big|_{x=-1} = \dfrac{1}{4}$,
et $a = (x-1)^2 f(x)\Big|_{x=1} = \dfrac{x+2}{x+1}\Big|_{x=1} = \dfrac{3}{2}$.
Le problème se présente au moment où nous voulons calculer b car on ne peut multiplier la relation par $x-1$ puis prendre $x=1$ (à cause du terme en $\dfrac{1}{(x-1)^2}$).
On contourne ce problème en multipliant toute la relation par x puis en faisant tendre x vers $+\infty$, il vient : $0 = 0 + b + \dfrac{1}{4}$ d'où $b = -\dfrac{1}{4}$.
Ainsi, on a la décomposition :

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{3/2}{(x-1)^2} + \frac{-1/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1}.$$

3. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Comment montrer qu'une partie F d'un ev E est un sev de E ?

• **On revient à la définition**.

Soit E un espace vectoriel réel et $F \subset E$; F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E si :

▶ $0_E \in F$

▶ $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in F^2,\ \alpha x + y \in F$.

Exemple : Soit l'ensemble

$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$$

où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est donnée ; montrer que F est un espace vectoriel.
Solution : Tout d'abord on note que $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'est notre espace vectoriel E).
Vérifions les axiomes :
- Ici $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ représente la matrice nulle, on a évidemment
$A \times 0 = 0 \times A = 0$ donc $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in F$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M, N \in F$, voyons si $\alpha M + N \in F$.
$A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN \underset{M,N \in F}{=} \alpha MA + NA = (\alpha M + N)A$, ainsi $\alpha M + N \in F$.
En conclusion, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (et donc F est lui-même un espace vectoriel).

• **On écrit, quand cela est possible, l'ensemble F à l'aide d'un Vect**.

Soit $S = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.
On rappelle que $F = Vect(v_1, \dots, v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n;\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \dots, v_n$. On sait que F est un sous-espace vectoriel de E, appelé le sous-espace vectoriel engendré par S (S est donc une famille génératrice de F).