

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction : probabilité sur un espace fini</b>	<b>1</b>
1.1	Probabilité sur un espace fini, événements . . . . .	1
1.1.1	Définitions . . . . .	1
1.1.2	Probabilités uniformes . . . . .	4
1.2	Probabilité conditionnelle et indépendance . . . . .	5
1.2.1	Probabilité conditionnelle . . . . .	5
1.2.2	Indépendance . . . . .	7
1.3	Exercices . . . . .	8
1.4	Résumé . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Variables aléatoires discrètes</b>	<b>11</b>
2.1	Espace de probabilité . . . . .	11
2.2	Variables aléatoires discrètes . . . . .	12
2.2.1	Rappel sur les manipulations de séries . . . . .	12
2.2.2	Définition . . . . .	13
2.2.3	Indépendance . . . . .	13
2.2.4	Lois discrètes usuelles . . . . .	14
2.2.5	Loi marginale . . . . .	17
2.3	Espérance et variance . . . . .	19
2.3.1	Espérance . . . . .	19
2.3.2	Variance . . . . .	23
2.4	Fonction génératrice des variables aléatoires entières . . . . .	24
2.5	Loi et espérance conditionnelles . . . . .	26
2.6	Exercices . . . . .	29
2.7	Résumé . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Variables aléatoires à densité</b>	<b>37</b>
3.1	Manipulation d'intégrales multiples . . . . .	37
3.1.1	Théorème de Fubini . . . . .	37
3.1.2	Changement de variables . . . . .	38
3.2	Variables aléatoires réelles à densité . . . . .	40
3.2.1	Définition . . . . .	40

3.2.2	Densités réelles usuelles . . . . .	41
3.2.3	Espérance, variance . . . . .	43
3.2.4	Fonction de répartition . . . . .	44
3.3	Vecteurs aléatoires à densité . . . . .	44
3.3.1	Définition . . . . .	44
3.3.2	Densité marginale . . . . .	45
3.3.3	Changement de variables . . . . .	45
3.3.4	Indépendance . . . . .	47
3.3.5	Covariance . . . . .	47
3.3.6	Loi et espérance conditionnelles . . . . .	49
3.4	Lois bêta, gamma, du chi 2, de Student et de Fisher . . . . .	51
3.5	Exercices . . . . .	54
3.6	Résumé . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Simulation</b> . . . . .	<b>61</b>
4.1	Simulation de variables aléatoires discrètes . . . . .	62
4.1.1	Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ . . . . .	62
4.1.2	Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$ . . . . .	62
4.1.3	Loi géométrique de paramètre $p \in ]0, 1]$ . . . . .	62
4.1.4	Simulation suivant une loi discrète quelconque . . . . .	63
4.2	Simulation de variables aléatoires à densité . . . . .	63
4.2.1	Loi uniforme sur $[a, b]$ avec $a < b \in \mathbb{R}$ . . . . .	63
4.2.2	Méthode d'inversion de la fonction de répartition . . . . .	63
4.2.3	Méthode polaire pour la loi normale centrée réduite . . . . .	64
4.2.4	Méthode du rejet . . . . .	65
4.3	Exercices . . . . .	68
4.4	Résumé . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Convergence et théorèmes limites</b> . . . . .	<b>73</b>
5.1	Convergence . . . . .	73
5.2	Lois des grands nombres . . . . .	77
5.2.1	Loi faible des grands nombres . . . . .	77
5.2.2	Loi forte des grands nombres . . . . .	77
5.3	Fonction caractéristique et convergence en loi . . . . .	81
5.3.1	Fonction caractéristique . . . . .	81
5.3.2	Convergence en loi . . . . .	84
5.4	Le théorème de la limite centrale . . . . .	87
5.4.1	Enoncé et preuve du résultat . . . . .	87
5.4.2	Intervalle de confiance dans la méthode de Monte-Carlo . . . . .	89
5.5	Exercices . . . . .	90

5.6	Résumé . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Vecteurs gaussiens</b>	<b>97</b>
6.1	Définition, construction . . . . .	97
6.1.1	Définition . . . . .	97
6.1.2	Stabilité du caractère gaussien par transformation linéaire . . . . .	98
6.1.3	Construction d'un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(\mu, \Lambda)$ . . . . .	99
6.2	Propriétés des vecteurs gaussiens . . . . .	99
6.2.1	Vecteurs gaussiens et indépendance . . . . .	99
6.2.2	Vecteurs gaussiens et convergence en loi . . . . .	101
6.3	Exercices . . . . .	103
6.4	Résumé . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Estimation de paramètres</b>	<b>107</b>
7.1	Modèle paramétrique . . . . .	107
7.2	Estimateurs . . . . .	108
7.2.1	Définitions . . . . .	108
7.2.2	L'Estimateur du Maximum de Vraisemblance . . . . .	110
7.2.3	Estimateurs de Moments . . . . .	116
7.2.4	Amélioration d'estimateurs . . . . .	116
7.3	Intervalles de confiance . . . . .	119
7.3.1	Approche non asymptotique . . . . .	119
7.3.2	Approche asymptotique . . . . .	122
7.4	Exercices . . . . .	123
7.5	Résumé . . . . .	125
<b>8</b>	<b>Tests d'hypothèses</b>	<b>127</b>
8.1	Tests . . . . .	127
8.1.1	Définitions . . . . .	127
8.1.2	Le cas du modèle gaussien $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}_1(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ : . . . . .	131
8.2	Le test du $\chi^2$ . . . . .	133
8.2.1	Test d'adéquation à une loi . . . . .	133
8.2.2	Test d'adéquation à une famille de lois . . . . .	135
8.3	Exercices . . . . .	136
8.4	Résumé . . . . .	139
<b>9</b>	<b>Régression Linéaire</b>	<b>141</b>
9.1	Estimation . . . . .	142
9.2	Test de l'utilité des régresseurs . . . . .	143
9.3	Exercices . . . . .	145
9.4	Résumé . . . . .	148

<b>10 Corrigés d'une sélection d'exercices et problèmes</b>	<b>149</b>
10.1 Probabilité sur un espace fini . . . . .	149
10.2 Variables aléatoires discrètes . . . . .	149
10.3 Variables aléatoires à densité . . . . .	157
10.4 Simulation . . . . .	163
10.5 Convergence et théorèmes limites . . . . .	164
10.6 Vecteurs gaussiens . . . . .	170
10.7 Estimateurs . . . . .	171
10.8 Tests d'hypothèses . . . . .	174
10.9 Régression linéaire . . . . .	175
<b>11 Tables statistiques</b>	<b>179</b>
11.1 Quantiles de la loi $\mathcal{N}_1(0, 1)$ . . . . .	179
11.2 Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}_1(0, 1)$ . . . . .	180
11.3 Quantiles de la loi du $\chi^2$ . . . . .	181
11.4 Quantiles de la loi de Student . . . . .	182
11.5 Quantiles de la loi de Fisher (ou Fisher-Snedecor) . . . . .	183
<b>Bibliographie</b>	<b>185</b>
<b>Index</b>	<b>187</b>
<b>Notations et symboles</b>	<b>189</b>