Astuces de calculs

Cette fiche a été placée au commencement du bloc-notes car elle est représentative de la philosophie des calculs provenant de tous les thèmes présentés. Il n'est pas envisageable de perdre trop de temps dans des calculs à rallonge, il faut donc savoir choisir le chemin le plus court.
Voici donc une présentation des différents moments-clés pour les calculs :

→ ***pour la soustraction*** : le plus rapide (et commode) est de faire l'opération unité par unité.
Ainsi : $3724,17 - 1143,8 = 2724,17 - 143,8 = 2624,17 - 43,8 = 2584,17 - 3,8$
$= 2581,17 - 0,8 = 2580,37$.

→ ***pour les carrés*** : on distinguera le calcul suivant la forme du nombre :
• pour les nombres se terminant par 0, on suivra l'exemple suivant :
$\mathbf{11}\underline{0}^2 = \mathbf{121}\underline{00}$, le carré finit par 00 et devant ce double zéro, on place le carré de 11.
• pour les nombres se terminant par 5, on suivra l'exemple suivant :
$\mathbf{8}\underline{5}^2 = \mathbf{72}\underline{25}$, le carré finit par 00 et devant ce 25, on place le produit de 8 par son suivant (soit 9).
• pour les autres carrés, on utilisera les identités remarquables, ainsi :
$42^2 = (40+2)^2 = 40^2 + 2 \times 2 \times 40 + 2^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764$.

→ ***pour le produit*** : on a plusieurs pistes possibles, tout dépend de la forme du produit à effectuer.
• <u>rassembler</u> : on essaiera de sortir du produit initial le produit d'un nombre pair et d'un multiple de 5 afin de faire apparaître un nombre rond (plus souple d'utilisation pour la suite du calcul).
• <u>observer</u> : parfois le calcul n'est même pas nécessaire et il suffit simplement d'aller observer le produit des unités des différents facteurs et de comparer le résultat avec le chiffre des unités des réponses.
Dans le produit $2\underline{6} \times 1\underline{3} \times 1\underline{1}$, on ne calcule que $6 \times 3 \times 1 = 18$ et on regarde quelle est la réponse finissant par un 8 (en espérant qu'il n'y en ait qu'une seule).

• centrer : par « centrer » on sous-entend de choisir, dans la mesure du possible et si cela semble donner un calcul plus simple, le nombre moyen entre deux termes d'un produit.
Par exemple, $38 \times 32 = (35+3)(35-3) = 35^2 - 3^2 = 1225 - 9 = 1216$,
ou encore : $113 \times 127 = (120-7)(120+7) = 120^2 - 7^2 = 14400 - 49 = 14351$.
• approcher : une nouvelle fois, les réponses auront leur mot à dire !
Si les réponses sont suffisamment espacées, une approximation du produit sera la bienvenue.
Voici une configuration-type, on a le calcul : $16,25 \times 23,4$ avec les réponses :
a) $380,25$ b) $265,35$ c) $725,15$ d) $502,25$ e) $430,25$
On écrira alors $16,25 \times 23,4 \simeq 15 \times 25 = (20-5)(20+5) = 20^2 - 5^2 = 375$, et on gardera donc a).
• pour terminer, signalons quelques cas particuliers :
pour un produit par 9, on pensera plutôt à faire $\times(10-1)$;
pour un produit par 25, on pensera plutôt à faire $\times\dfrac{100}{4}$;
pour un produit par $0,1;\ 0,125;\ 0,2;\ 0,25;\ 0,5$, on pensera plutôt à faire respectivement $\times\dfrac{1}{10};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{5};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{2}$.

→ ***pour la division*** : on a également plusieurs voies d'exploration :
• simplifier : on pensera à simplifier par un (ou des) facteur(s) commun(s) au numérateur et au dénominateur pour alléger le calcul.
Il faudra savoir user des critères de divisibilité au mieux pour faire apparaître ces facteurs.
• approcher : on essaiera de mettre en avant une nouvelle division avec des termes qui seront simplifiables (il faudra anticiper).
Par exemple : $\dfrac{722,1}{34,3} \simeq \dfrac{720}{35} = \dfrac{700}{35} + \dfrac{20}{35} = 20 + \dfrac{4}{7} \simeq 20,5$.
• décomposer : si le numérateur est supérieur au dénominateur, on cherchera à faire apparaître un grand multiple du dénominateur au numérateur pour élaguer ce dernier.
D'où : $\dfrac{326}{7} = \dfrac{280}{7} + \dfrac{46}{7} = 40 + \dfrac{42}{7} + \dfrac{4}{7} \simeq 46,5$.

→ ***pour l'utilisation de*** π : selon la précision à avoir (donnée par le rapprochement des réponses), on a 2 possibilités :
• si les réponses sont espacées, on remplacera π par 3.
• sinon, on affinera l'approximation en choisissant $3 + \dfrac{1}{10}$ pour π.

Du calcul, du calcul ...

On trouve souvent une ou deux questions sur un énoncé purement calculatoire, et il ne faut pas se rater car c'est clairement le type de questions qui permet de se mettre en confiance (et de faire des points).
Les règles d'arithmétique gravitant sur ces questions reposent sur les propriétés concernant les puissances, les identités remarquables, les simplifications fractionnaires.

→ ***Pour les simplifications sur les puissances*** :
$a^\alpha \times a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$; $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$; $a^\alpha \times b^\alpha = (ab)^\alpha$.
Une puissance particulière à connaître : $a^0 = 1$, pour $a \neq 0$.
Une simplification utile : $(-1)^{pair} = 1$ et $(-1)^{impair} = -1$.

→ ***Pour les simplifications sur les fractions*** :
$\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$; $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b \times c}$; $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$; $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$.

→ ***Les identités remarquables à connaître*** :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Exemple : Calculer : $A = (-1)^5 \times \dfrac{3^3 \times 7^2 \times 2^6}{6^5 \times 7 \times 9}$.

Résolution *: On peut tout d'abord dire que* $(-1)^5 = -1$.
Ensuite, il faut repérer les mêmes entiers et comparer leurs puissances.
Dans 6^5 *on peut lire* $(2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^5$, *et dans 9, on a* 3^2. *Ainsi :*
$A = -\dfrac{3^3 \times 7^2 \times 2^6}{2^5 \times 3^7 \times 7} = -\dfrac{7^1 \times 2^1}{3^4} = -\dfrac{14}{81}$.

Exercice 1.1 : Que vaut le quart du sixième de 516 ?
a) 20 b) 21,5 c) 22 d) 25 e) 27,5

Exercice 1.2 : Que vaut : $B = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{4}{5}}{\frac{7}{6}}$?
a) $\dfrac{2}{3}$ b) $0,5$ c) $0,6$ d) $\dfrac{6}{7}$ e) $\dfrac{7}{10}$

Exercice 1.3 : Que vaut : $C = 2011^2 - 2 \times 2011$?
a) 440099 b) 449904 c) 404040099 d) 4040099 e) 40000990

Exercice 1.4 : Que vaut : $D = 1 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$?
a) $\dfrac{17}{12}$ b) $\dfrac{5}{4}$ c) $\dfrac{12}{17}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{17}{11}$

Exercice 1.5 : Jean a en sa possession une encyclopédie de 1153 pages. Il voudrait savoir quel est le nombre de chiffres apparaissant sur les numéros de pages. Il y en a :
a) 2755 b) 2905 c) 3505 d) 3625 e) 3475

Exercice 1.6 : Que vaut : $4^4 \times 5^3 \times 3$?
a) 3520 b) 72000 c) 60000 d) 62000 e) 35000

Exercice 1.7 : Une préparation culinaire est composée de farine, de sucre, de lait et d'œufs. La masse de farine représente le quart de la masse de la préparation. La masse de sucre représente les deux tiers de la masse de farine. La masse de lait représente les neuf quarts de la masse de sucre.
Quelle fraction de la masse de la préparation représente la masse d'œufs ?
a) $\dfrac{1}{5}$ b) $\dfrac{7}{24}$ c) $\dfrac{1}{6}$ d) $\dfrac{1}{8}$ e) $\dfrac{5}{24}$

Exercice 1.8 : Chaque semaine, Olivier suit des cours de musique au conservatoire. Dans le temps qu'il consacre à la musique :
- 1/3 se passe aux répétitions de l'orchestre
- les 2/5 au cours de violon
- le temps restant se partage entre le solfège ($1h$) et la chorale ($40\ min$)

Combien de temps passe-t-il chaque semaine au conservatoire ?
a) $6h15$ b) $7h25$ c) $5h45$ d) $6h$ e) $6h55$

Diviseurs et nombres premiers

Les exercices autour de la notion de diviseurs et des nombres premiers reposent tout d'abord sur la compréhension de ces termes.

$\rightarrow$ ***les diviseurs*** : soit $a, b \in \mathbb{N}$ (avec $a \neq 0$), on dira que a est un **diviseur** de b (ou encore : a divise b) s'il existe $c \in \mathbb{N},\ b = a \times c$.
On pourra remarquer que 1 et b sont toujours des diviseurs de b.

Exemple 1 : Combien le nombre 24 a-t-il de diviseurs ?

Résolution *: Les diviseurs de 24 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. On en a donc 8.*

$\rightarrow$ ***les nombres premiers*** : ce sont sont les nombres ≥ 2 ayant pour seuls diviseurs 1 et eux-mêmes. On a donc comme nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. (il sera utile de connaître les nombres premiers jusqu'à 101)

Exemple 2 : Quelle est la valeur de x pour que le nombre à trois chiffres $11x$ soit un nombre premier ?

Résolution *: On a les nombres* $110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119$.
On peut déjà supprimer tous les nombres pairs et celui finissant par 5.
Ensuite, 111, 114 et 117 sont des multiples de 3 donc on peut les supprimer également. Il nous reste alors 113 et 119. En remarquant que $119 = 70 + 49$*, on constate que* 119 *est un multiple de 7 et ainsi c'est 113 qui est un nombre premier (*$x = 3$*).*

$\rightarrow$ ***partage*** : on pourra appliquer cette notion de diviseur au problème de partage équitable. Présentons-le à l'aide d'un exemple. Il y a 20 filles et 30 garçons. On veut former des équipes avec le même nombre de filles et le même nombre de garçons dans chacune. Quel en est le nombre maximal ?
Il faut bien comprendre que ce nombre doit être un diviseur de 20 et de 30 ; et en s'écrivant la liste des diviseurs, on choisit le plus grand qui est en commun : 10 (les diviseurs de 20 : 1,2,4,5,10,20 et ceux de 30 : 1,2,3,5,6,10,15,30).
Il y aura donc au maximum 10 équipes de ce type.

Exercice 2.1 : Parmi les nombres suivants, lequel est premier ?
a) 69 b) 87 c) 133 d) 163 e) 153

Exercice 2.2 : Le nombre 6 est un nombre *parfait* car il est égal à la somme de ses diviseurs (excepté lui-même) : $6 = 1 + 2 + 3$.
Parmi les nombres suivants, lequel est *parfait* ?
a) 32 b) 20 c) 28 d) 13 e) 12

Exercice 2.3 : Quel est le nombre de possibilités pour que le nombre à 3 chiffres $7XY$ soit un multiple de 3 sachant que X et Y sont différents de 0 ?
a) 14 b) 18 c) 25 d) 27 e) 29

Exercice 2.4 : La somme de nombres impairs consécutifs est divisible par :
a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) on ne peut rien dire

Exercice 2.5 : Soit A et B deux nombres à 4 chiffres.
On sait que $A = 115x$ est divisible par 3 et par 5 et aussi que $B = 14y5$ est divisible par 9.
Que vaut le rapport $\dfrac{A}{B}$?
a) $\dfrac{77}{79}$ b) $\dfrac{7}{9}$ c) $\dfrac{11}{12}$ d) $1,1$ e) il y a 2 possibilités

Exercice 2.6 : Avant de commencer une partie, les joueurs se partagent exactement 180 jetons à 5 points et 170 jetons à 2 points.
Combien peut-il y avoir de joueurs au maximum ?
a) 7 b) 17 c) 18 d) 10 e) 5

Exercice 2.7 : Théo a gagné 84 sucettes et 147 bonbons à un jeu. Étant très généreux, et ayant surtout très peur du dentiste, il décide de les partager avec des amis. Pour ne pas faire de jaloux, chacun doit avoir le même nombre de sucettes et le même nombre de bonbobns.
Combien de personnes au maximum pourront bénéficier de ces friandises (Théo compris) ?
a) 17 b) 21 c) 8 d) 63 e) 24

Proportionnalité

On dit que deux quantités X et Y sont proportionnelles s'il existe un nombre a différent de 0 tel que : $X = aY$.
Pour représenter ce rapport au mieux, on utilise souvent un tableau de proportionnalité.
Ce tableau fera alors appel à la méthode du produit en croix qui consiste à photocopier le coefficient de proportionnalité entre deux grandeurs.

Exemple 1 : Si l'on achète 7 clés USB pour 115 euros, quel en sera le prix pour 5 ?

Résolution *: Il y a une proportionnalité entre le nombre de clés USB et le prix qu'il en coûte.*

Plaçons les différents éléments dans un tableau :

clés USB	*7*	*5*
prix	*115*	x

.

Le produit en croix nous dit alors que nous avons : $115 \times 5 = 7x$ *ce qui donne* $x = \frac{575}{7} = \frac{490}{7} + \frac{70}{7} + \frac{14}{7} + \frac{1}{7} = 82,1$ *euros environ.*

Cette notion de proportionnalité apparaît dans les problèmes de pourcentages, de vitesses, d'échelles de schémas, etc.
Mais attention, une erreur d'inattention et le piège se referme...

Exemple 2 : Vincent a semé $11kg$ d'engrais sur son terrain rectangulaire de dimensions : $10m$ sur $8m$. Quelle quantité d'engrais faudra-t-il à Anne pour semer son jardin rectangulaire de $30m$ sur $24m$?

Résolution *: L'erreur serait de croire que la quantité d'engrais est proportionnelle aux longueurs du jardin ; en fait elle l'est par rapport à la surface de celui-ci. Comme le coefficient de proportionnalité entre les 2 surfaces est de 9 (on a multiplié par 3 les longueurs, donc l'aire est multipliée par* $3^2 = 9$*), il faudra à Anne :* $9 \times 11 = 99kg$ *d'engrais.*

Exercice 3.1 : Trois amis, Phil, Chris et Bob ont loué pour 450 euros un studio à la montagne. Phil l'a utilisé les 5^{ers} jours, Chris les huit jours suivants et Bob les deux derniers jours. Chacun paiera une part proportionnelle à son temps d'occupation ; quelle est la part de Chris ?
a) 200 euros b) 225 euros c) 240 euros d) 275 euros e) 285 euros

Exercice 3.2 : Si 9 artisans boivent 12 brocs de vin en 8 jours, combien 24 artisans boiront-ils de brocs de vin en 30 jours ?
a) 120 b) 130 c) 140 d) 150 e) 160

Exercice 3.3 : Sur un plan de maison, on a choisi $3cm$ pour représenter une longueur de $7,5m$. Quelle est l'échelle de ce plan ?
a) 1/25 b) 1/350 c) 1/250 d) 1/2500 e) 1/2250

Exercice 3.4 : Un immeuble comporte un studio, deux F1, deux F2, trois F3 et trois F4. Les studios ont une superficie de $20m^2$, les F1 de $30m^2$, les F2 de $45m^2$, les F3 de $70m^2$, et les F4 de $90m^2$. Les charges annuelles (réparties proportionnellement à la taille de l'habitation) de fonctionnement s'élèvent à 13000 euros.
Quelle sera la charge à payer par une personne habitant dans un F3 ?
a) 1321 euros b) 1400 euros c) 1500 euros d) 1455 euros e) 1622 euros

Exercice 3.5 : Pour la prime de fin d'année, un chef d'entreprise dispose d'une somme de 3800 euros qu'il répartit entre ses trois employés proportionnellement à leur ancienneté. Le premier a 6 ans d'ancienneté, le second 3 ans et le troisième 11 ans.
Quel sera le montant de la prime de l'employé ayant 3 ans d'ancienneté ?
a) 790 euros b) 545 euros c) 590 euros d) 570 euros e) 607 euros

Exercice 3.6 : $3kg$ de tomates et 2 salades coûtent 8 euros ; $5kg$ de tomates et 1 salade coûtent 11 euros. Combien coûtent, aux mêmes conditions, $4kg$ de tomates et 5 salades ?
a) 13 euros b) 11 euros c) 17 euros d) 12 euros e) 15 euros