Fiche-méthodes 1 :

Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples

Le but de la méthode est de décomposer une fraction rationnelle $f = \dfrac{P}{Q}$ (où P et Q sont des polynômes premiers entre eux) en une somme de fractions rationnelles « plus simples » .
On peut présenter deux méthodes classiques pour y arriver.

On réduit tous les termes au même dénominateur.

On réduit au même dénominateur tous les termes de la partie fractionnaire de f, et on identifie avec la fraction initiale.
L'énoncé nous proposera la décomposition attendue (ou en tous les cas sa forme).

Exemple : Soit la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x+2)}$; il nous faut trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+2}$ pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$.
Solution : On part de la forme proposée et on réduit tout au même dénominateur :
$\dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+2} = \dfrac{(b+c)x^2 + (a+b-2c)x + (2a-2b+c)}{(x-1)^2(x+2)}$
et on l'identifie à la forme initiale de f, ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-2c=0 \\ 2a-2b+c=1 \end{cases}.$$

On trouve alors : $a = \dfrac{2}{3},\ b = \dfrac{4}{9},\ c = \dfrac{5}{9}$, d'où la décomposition de f :

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{2/3}{(x-1)^2} + \frac{4/9}{x-1} + \frac{5/9}{x+2}.$$

Remarque : cette méthode donne souvent lieu à des calculs assez lourds ; il est conseillé, chaque fois que cela est possible, de l'éviter.

On calcule les coefficients de la décomposition en les isolant.

Pour isoler le coefficient α se trouvant dans la fraction $\dfrac{\alpha}{x-a}$ d'une décomposition en éléments simples, on pensera à multiplier toute la relation par $x-a$ puis à prendre $x=a$. On répète l'opération pour chacun des coefficients à déterminer.

Exemple 1 : Soit à décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$ pour $x \neq 2$ et $x \neq -3$; il nous faut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}.$$

Solution : On a les valeurs : $a = (x-2)f(x)\Big|_{x=2} = \dfrac{x}{x+3}\Big|_{x=2} = \dfrac{2}{5}$,
et $b = (x+3)f(x)\Big|_{x=-3} = \dfrac{x}{x-2}\Big|_{x=-3} = \dfrac{3}{5}$.
D'où la décomposition :

$$\frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{2/5}{x-2} + \frac{3/5}{x+3}.$$

Exemple 2 : La tâche peut s'avérer plus délicate s'il on a dans la décomposition un terme avec un carré.
Prenons l'exemple $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$.
Solution : On a les valeurs : $c = (x+1)f(x)\Big|_{x=-1} = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}\Big|_{x=-1} = \dfrac{1}{4}$,
et $a = (x-1)^2 f(x)\Big|_{x=1} = \dfrac{x+2}{x+1}\Big|_{x=1} = \dfrac{3}{2}$.
Le problème se présente au moment où nous voulons calculer b car on ne peut multiplier la relation par $x-1$ puis prendre $x = 1$ (à cause du terme en $\dfrac{1}{(x-1)^2}$).
On contourne ce problème en multipliant toute la relation par x puis en faisant tendre x vers $+\infty$, il vient : $0 = 0 + b + \dfrac{1}{4}$ d'où $b = -\dfrac{1}{4}$.
Ainsi, on a la décomposition :

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{3/2}{(x-1)^2} + \frac{-1/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1}.$$

Fiche-méthodes 2 :

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Comment montrer qu'une partie F d'un ev E est un sev de E ?

• **On revient à la définition**.

> Soit E un espace vectoriel réel et $F \subset E$; F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E si :
> - $0_E \in F$
> - $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in F^2,\ \alpha x + y \in F.$

Exemple : Soit l'ensemble

$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$$

où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est donnée ; montrer que F est un espace vectoriel.
Solution : Tout d'abord on note que $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'est notre espace vectoriel E).
Vérifions les axiomes :
- Ici $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ représente la matrice nulle, on a évidemment $A \times 0 = 0 \times A = 0$ donc $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in F$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M, N \in F$, voyons si $\alpha M + N \in F$.
$A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN \underset{M,N \in F}{=} \alpha MA + NA = (\alpha M + N)A$, ainsi $\alpha M + N \in F$.
En conclusion, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (et donc F est lui-même un espace vectoriel).

• **On écrit, quand cela est possible, l'ensemble F à l'aide d'un Vect**.

> Soit $S = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.
> On rappelle que $F = Vect(v_1, \ldots, v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n;\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$. On sait que F est un sous-espace vectoriel de E, appelé le sous-espace vectoriel engendré par S (S est donc une famille génératrice de F).

Exemple : Soit l'ensemble

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0,\ 2x - y + z = 0\}.$$

Noter que : $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ z = 3y \end{array} \right.$; montrer que F est un espace vectoriel.

Solution : On a $v = (x, y, z) \in F \Longleftrightarrow$ il existe un réel y tel que :
$v = (x, y, z) \in F \Longleftrightarrow v = (-y, y, 3y) = y(-1, 1, 3)$, d'où :
$F = Vect((-1, 1, 3))$.
On peut donc conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (et donc c'est un espace vectoriel).

Remarque : on peut même conclure que $((-1, 1, 3))$ *est une base de* F *et* $dim\ F = 1$.

• On peut essayer de montrer que *F* est le noyau ou l'image d'une application linéaire.

Exemple : Soit l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x - 4y + z = 0\}$; montrer que F est un espace vectoriel.
Solution : On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = 3x - 4y + z.$$

Alors, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x - 4y + z = 0\} = Ker\ f$; d'où : F est un espace vectoriel.

Comment montrer que *F* n'est pas un sev de *E* ?

On peut soit montrer que $0_E \notin F$, ou si $0_E \in F$ montrer que F n'est pas stable soit pour la multiplication externe soit pour l'addition.

Exemple 1 : Pour l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 1\}$, on peut remarquer que $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ n'appartient pas à F car $0 + 0 = 0 \neq 1$.
Donc, F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2 : Soit l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0\}$.
$0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$; on ne peut rien dire pour le moment.
Considérons : $v_1 = (1, 0) \in F$ et $v_2 = (0, 1) \in F$.
On a $v_1 + v_2 = (1, 1) \notin F$.
La stabilité pour la loi + n'étant pas assurée, F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Comment montrer que deux sev de dimension finie sont égaux ?

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont égaux, il suffit de montrer par exemple : $F \subset G$ et $dim\ F = dim\ G$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $v_1 = (2, 3, -1)$,
$v_2 = (1, -1, -2)$, $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$.
Montrer que : $Vect(v_1, v_2) = Vect(w_1, w_2)$.

Solution : On note $F = Vect(v_1, v_2)$ et $G = Vect(w_1, w_2)$.
Clairement, par non colinéarité de v_1 et v_2 et aussi de w_1 et w_2, on a $dim\ F = dim\ G = 2$.
Il nous reste à montrer une inclusion ; par exemple, pour montrer que $F \subset G$, il nous suffit de vérifier que v_1 et v_2 sont dans G.
On trouve facilement que $v_1 = \frac{3}{7}w_1 + \frac{1}{7}w_2$ (on a raisonné à l'aide des coordonnées nulles dans w_1 et w_2).
De même, on a $v_2 = -\frac{1}{7}w_1 + \frac{2}{7}w_2$.
Dès lors, $F \subset G$ et donc, avec $dim\ F = dim\ G$, on a $F = G$.

Comment montrer qu'un sev F de E est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$?

• **On utilise la définition.**

> Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E. F est dit stable par f si $f(F) \subset F$.
> Autrement dit, F est stable par $f \iff \forall x \in F,\ f(x) \in F$.

Remarque : si F est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$, la restriction de f à F, notée $f_{|F}$ induit un endomorphisme de F défini par : $\forall x \in F,\ f_{|F}(x) = f(x)$.

Exemple : En notant E_λ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ, montrer que E_λ est stable par f.
Solution : En effet, pour $x \in E_\lambda$ on $f(x) = \lambda x$.
Il nous faut vérifier que $f(x) \in E_\lambda$ c'est-à-dire $f(f(x)) = \lambda f(x)$ ce qui est immédiat en composant la relation $f(x) = \lambda x$ par f.
Ainsi, tout E_λ est stable par f.

• **On utilise une famille génératrice de F.**

> Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille génératrice de F. Pour montrer que $F = Vect(v_1, \ldots, v_p)$ est stable par f, on vérifie que : $\forall i \in [\![1;p]\!],\ f(v_i) \in F$.

Exemple : On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$ et $F = Vect(v_1, v_2)$.
Montrer que F est stable par f.
Solution : Pour cela, il nous suffit de vérifier que $f(v_1)$ et $f(v_2)$ sont dans F ; on procède matriciellement :

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et donc $f(v_1)=v_1\in F$.
$A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ et donc $f(v_2)=v_1+v_2\in F$.
En conclusion, F est stable par f.

Fiche-méthodes 3 :

Familles libres ou liées - Bases

Comment montrer que la famille $S = (v_1, \dots, v_k)$ est libre ?

Soit $S = (v_1, \dots, v_k)$ une famille de k vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

• **Dans le cas général, on revient à la définition**.

Celle-ci nous précise que si une combinaison linéaire de ces vecteurs est nulle alors nécessairement tous les coefficients sont nuls, soit :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1;k]\!],\ \lambda_i = 0.$$

Deux cas particuliers :
⋆ Si la famille ne contient qu'un seul vecteur v, on utilise la propriété :
(v) est libre $\Longleftrightarrow v \neq 0_E$.
⋆ Si la famille contient deux vecteurs u et v, on utilise la propriété :
(u, v) libre $\Longleftrightarrow u$ et v ne sont pas proportionnels.

Remarque : noter que pour qu'une famille de plus de trois vecteurs soit libre, il ne suffit pas que les vecteurs soient 2 à 2 non colinéaires.

<u>*Exemple*</u> : Soit $S = \Big(v_1 = (5, 2, -11), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (-1, 0, 6)\Big)$. Vérifier que S est libre.

Solution : On a : $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -11\lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ \lambda_3 = 3\lambda_1 \\ -11\lambda_1 - 4\lambda_1 + 18\lambda_1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

Ainsi, la famille S est libre.

• **On peut aussi déterminer le rang de S**.

En calculant le rang de S, on utilise l'équivalence :
S est libre $\Longleftrightarrow rg(S) = k$.

• Un cas particulier pour les familles de polynômes.

Si l'on a une famille de polynômes dont les degrés sont deux à deux distincts alors on peut conclure que la famille est libre (la réciproque est fausse).

Comment montrer que la famille $S = (v_1, \ldots, v_k)$ est liée ?

• On vérifie que l'un des vecteurs de S est combinaison linéaire des autres.

Pour utiliser cette méthode, il est préférable que les coefficients définissant les vecteurs, matrices, polynômes soient assez simples afin que la relation existante entre ces éléments nous saute aux yeux.

• On peut utiliser la définition.

On part d'une combinaison linéaire de ces vecteurs supposée nulle et on vérifie que les coefficients ne sont pas tous nuls. En d'autres termes, on part de l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$ et on montre qu'il existe $i_0 \in [\![1;k]\!],\ \lambda_{i_0} \neq 0$.
Deux cas particuliers :
⋆ Si la famille ne contient qu'un seul vecteur v, on utilise :
(v) est liée $\Longleftrightarrow v = 0_E$.
⋆ Si la famille ne contient que deux éléments u et v, on utilise :
(u, v) liée $\Longleftrightarrow u$ et v sont proportionnels.

Exemple : Soit $P_1 = X + 1$, $P_2 = X^2 - 3X$ et $P_3 = (X - 1)^2$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer que la famille $S = (P_1, P_2, P_3)$ est liée.
Solution : Partons de l'égalité : $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$.
Elle s'écrit : $\lambda_1(X + 1) + \lambda_2(X^2 - 3X) + \lambda_3(X - 1)^2 = 0$ soit
$\lambda_1 + \lambda_3 + (\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3)X + (\lambda_2 + \lambda_3)X^2 = 0$.
D'où le système : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases}$.
On choisit par exemple $\lambda_3 = 1$, on a alors $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
En conclusion, $S = (P_1, P_2, P_3)$ est liée et $P_3 = P_1 + P_2$.

• On compare le nombre d'éléments de la famille à la dimension de l'espace.

Pour une famille $S = (v_1, \ldots, v_k)$ d'un espace vectoriel E de dimension n, si l'on a $k > n$ alors on peut conclure que la famille S est liée.