Chapitre 1

Les suites

I. Étude globale d'une suite

A. Les suites majorées, minorées, bornées

Définition

La suite (u_n) est majorée si et seulement s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n pour lequel la suite est définie :

$$u_n \leq M$$

■ *Exemple*

Soit (u_n) la suite définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$

Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$\dfrac{1}{n} \leq 1$

La suite (u_n) est donc majorée par 1.

Définition

La suite (u_n) est minorée si et seulement s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n pour lequel la suite est définie :

$$u_n \geq m$$

■ *Exemple*

Soit (u_n) la suite définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$

Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$\dfrac{1}{n} \geq 0$

La suite (u_n) est donc minorée par 0.

Définition

La suite (u_n) est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

■ *Exemple*

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{1}{n}$ est à la fois minorée par 0 et majorée par 1.

Elle est donc bornée et on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq 1$

B. Le sens de variation

Définition

La suite (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout entier naturel n pour lequel la suite est définie :

$$u_{n+1} \geq u_n$$

■ **Exemple**

Considérons la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 12$ et par, pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = (u_n)^2 + u_n$

On a, pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} - u_n = u_n{}^2$

Or, pour tout entier naturel n :

$u_n{}^2 \geq 0$

Ainsi, pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc, pour tout n :

$u_{n+1} \geq u_n$

Donc la suite (u_n) est croissante.

Définition

La suite (u_n) est décroissante si et seulement si, pour tout entier naturel n pour lequel la suite est définie :

$$u_{n+1} \leq u_n$$

■ **Exemple**

Considérons la suite définie pour tout entier naturel non nul par :

$u_n = \dfrac{1}{n}$

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{-1}{n(n+1)}$

Or, pour tout entier naturel n non nul :

$\dfrac{-1}{n(n+1)} \leq 0$

Ainsi, pour tout entier naturel n non nul :

$u_{n+1} - u_n \leq 0$

Soit, pour tout entier naturel n non nul :

$u_{n+1} \leq u_n$

Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante.

Définition

La suite (u_n) est constante si et seulement si, pour tout entier naturel n pour lequel la suite est définie :

$$u_{n+1} = u_n$$

Définition

La suite (u_n) est monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante (sans changer de sens de variation).

C. Suites arithmétiques et géométriques

1. Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n pour lequel elle est définie :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

r est alors la raison de la suite arithmétique.

■ ***Exemple***

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par, pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = u_n - 2$

On remarque que l'on passe d'un terme de la suite au suivant en ajoutant –2.
Cette suite est donc arithmétique de raison –2.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$, la suite est strictement croissante.
- Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante.

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, définie à partir du rang p.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, son terme général est égal à :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

En particulier, si (u_n) est définie dès le rang 0, alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr$$

■ ***Exemple***

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 3$.
On a, pour tout entier naturel n :

$u_n = 3 - 2n$

Propriété

Pour tout entier naturel non nul n :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

■ **Exemple**

$1+2+3+\cdots+15=\dfrac{15\times(15+1)}{2}=120$

2. Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est géométrique si et seulement s'il existe un réel q tel que, pour tout entier n pour lequel elle est définie :

$$u_{n+1}=u_n\times q$$

q est alors appelé raison de la suite.

■ **Exemple**

On considère la suite définie par son premier terme $u_0=1$ et par, pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}=3u_n$

On remarque que l'on passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant par 3.

Cette suite est donc géométrique de raison 3.

Propriété

Soit q un réel strictement positif, et la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=q^n$.

- Si $q>1$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $0<q<1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q=1$, la suite (u_n) est constante.

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, définie à partir du rang p. Pour tout entier n supérieur ou égal à p, son terme général est égal à :

$$u_n=u_p\times q^{n-p}$$

En particulier, si (u_n) est définie dès le rang 0, alors pour tout entier naturel n :

$$u_n=u_0\times q^n$$

■ **Exemple**

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $u_0=3$.

On a alors, pour tout entier naturel n :

$u_n=3\times 2^n$

Propriété

Pour tout réel q différent de 1 et tout entier naturel non nul n :

$$1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

■ *Exemple*

$$1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{52}=\frac{1-3^{53}}{1-3}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 3^{53}$$

II. Limites

A. Limite finie ou infinie

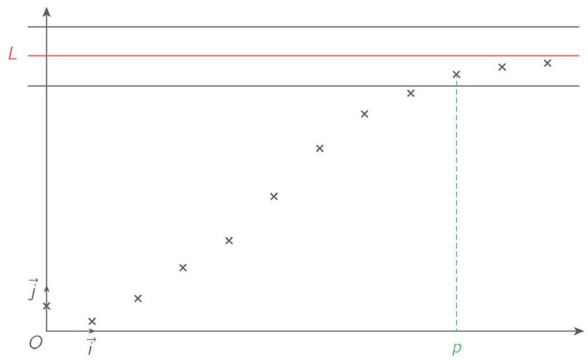
Remarque

La limite d'une suite ne peut être étudiée qu'en $+\infty$.

Définition

(u_n) tend vers le réel L quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert (aussi petit que l'on veut) contenant L contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
Le réel L est appelé limite (finie) de la suite (u_n). On note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L$$



Théorème

Si elle existe, la limite L de la suite (u_n) est unique.

Définition

(u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout réel A (aussi grand que l'on veut), tous les termes u_n sont supérieurs à A à partir d'un certain rang. On note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

■ ***Exemple***

Considérons la suite définie pour tout entier naturel n par :

$u_n = 3n + 4$

Soit A un réel quelconque fixé. Pour tout entier naturel n :

$u_n > A \Leftrightarrow 3n + 4 > A \Leftrightarrow n > \dfrac{A-4}{3}$

Par conséquent, quel que soit le réel A, il existe toujours un entier n à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A;+\infty[$.

Donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Définition

(u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout réel A (aussi petit que l'on veut), tous les termes u_n sont inférieurs à A à partir d'un certain rang. On note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

■ ***Exemple***

Considérons la suite définie pour tout entier naturel n par :

$u_n = -2n + 5$

Soit A un réel quelconque fixé. On a, pour tout entier naturel n :

$u_n < A \Leftrightarrow -2n + 5 < A \Leftrightarrow n > \dfrac{5-A}{2}$

Par conséquent, quel que soit le réel A, il existe toujours un entier n à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]-\infty;A[$.

Donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

B. Les suites convergentes

Définition

La suite (u_n) est convergente si et seulement si elle admet une limite finie.

■ ***Exemple***

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par :

$u_n = \dfrac{1}{n}$

On a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Donc (u_n) est convergente.

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Définition

La suite (u_n) est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$ ou si elle n'admet pas de limite.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (-1)^n$$

La suite (u_n) étant alternée (elle prend successivement les valeurs 1, –1, 1, –1, etc.), elle n'admet pas de limite. Elle est divergente.

Théorème

Soit un réel q différent de 1 :

- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) a pour limite 0.
- Si $1 < q$, alors la suite (q^n) a pour limite $+\infty$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Exemples

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$

C. Opérations sur les limites

Dans cette sous-partie, L et L' désignent des réels.

Théorème

Si (u_n) a pour limite	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et si (v_n) a pour limite	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?