Chapitre 1

Mécanique du point matériel

1.1 Introduction

Les objets dont nous nous servons dans la vie courante présentent les caractéris-tiques de corps solides en tridimensionnels, de tailles non négligeables. Nous commencerons néanmoins nos rappels de mécanique par la *cinématique* d'un point matériel. On considère comme *point matériel* tout objet suffisamment petit et rigide, dont les dimensions peuvent être négligées en comparaison des distances parcourues.

A cet égard, rappelons qu'en mécanique céleste, la Terre et d'autres planètes du système solaire peuvent être traitées comme des points matériels, tant les distances parcourues sont énormes par rapport aux dimensions propres de ces objets. Par exemple, le diamètre de la Terre étant égal à 12 800 km environ et sa distance moyenne du Soleil étant de 150 000 000 km, le rapport entre ces deux grandeurs est $8,6 \times 10^{-5}$. Imaginons deux joueurs de tennis séparés par une distance de 20 mètres au maximum. En gardant la même échelle, et en comparant chacun des deux joueurs au Soleil et la balle à la Terre, la balle devrait mesurer $20 \times 8,6 \times 10^{-5}$ mètres, soit à peine deux millimètres de diamètre, ce qui, en pratique, la rendrait semblable à un point matériel, du point de vue des joueurs, bien entendu.

La validité de l'approximation du point matériel dépend donc de la situation considérée et du problème à résoudre ; en fin de compte, c'est le bon sens qui décide de l'opportunité d'une telle description.

1.2 Mouvement d'un point. Trièdre de Frenet

Commençons donc par l'analyse d'un mouvement arbitraire d'un point matériel dont la position dans l'espace est repérée par ses coordonnées cartésiennes [1]

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} \tag{1.1}$$

où les trois vecteurs $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ forment un repère orthonormé, d'orientation directe, immobile par rapport à l'observateur. Il va de soi que les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont au moins deux fois différentiables et régulières (entre autres, elles n'admettent pas de valeurs multiples pour une valeur de t donnée, etc). L'ensemble des points $\mathbf{r}(t)$ pour toutes les valeurs t du temps pendant lequel nous observons le mouvement forme la *trajectoire* du point matériel (figure 1.1).

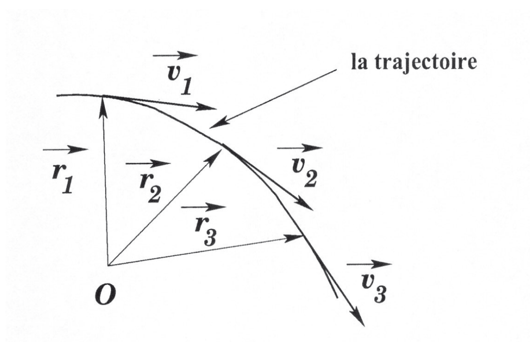

FIGURE 1.1 – Trajectoire d'un point matériel. Le vecteur vitesse évolue avec le temps.

Le vecteur *vitesse* du point matériel est défini comme la dérivée première du vecteur position $\mathbf{r}(t)$ par rapport au temps t. L'ensemble des trois dérivées premières des coordonnées cartésiennes se projettera alors sur les trois axes du repère immobile comme suit

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k} = \dot{x}\;\mathbf{i} + \dot{y}\;\mathbf{j} + \dot{z}\;\mathbf{k}$$

où nous avons introduit la notation "point" pour représenter la dérivation temporelle : $\dot{x} = dx/dt$, etc. Il est souvent utile d'introduire la représentation graphique de l'évolution temporelle du vecteur vitesse au cours de mouvement du point matériel. Cette visualisation s'appelle *l'hodographe* et se représente

1. Attention à la notation : désormais, les lettres écrites en caractères gras correspondent aux vecteurs en trois dimensions.

par une courbe dans l'espace des vitesses, que l'on obtient en reportant les vecteurs vitesse $\mathbf{v}(t)$ à partir de l'origine (figure 1.2).

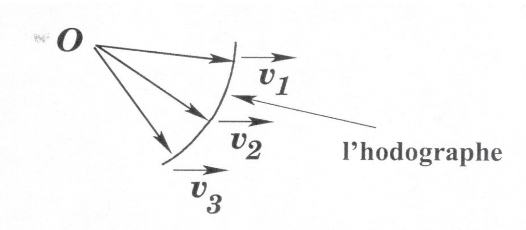

FIGURE 1.2 – L'hodographe.

L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, ou encore la dérivée seconde de la position $\mathbf{r}$ par rapport au temps :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt} = \ddot{x}\ \mathbf{i} + \ddot{y}\ \mathbf{j} + \ddot{z}\ \mathbf{k}$$

La vitesse instantanée est tangente à la trajectoire, tandis que l'accélération peut avoir aussi une composante perpendiculaire à la trajectoire. Introduisons la *vitesse scalaire*, c'est à dire, la valeur absolue de la vitesse :

$$v = \mid \mathbf{v} \mid = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \qquad (1.2)$$

La même expression peut être écrite à l'aide de *l'élément de longueur*

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

puisque

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} = \frac{ds}{dt} \qquad (1.3)$$

On peut utiliser l'élément de longueur ds à la place du temps dt pour paramétrer la trajectoire. Le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ peut alors être écrit comme la dérivée composée :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\,\frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\,\mathbf{t}, \qquad (1.4)$$

où $\mathbf{t}$ est le *vecteur tangent* à la trajectoire. On prouve facilement que ce vecteur est unitaire. En effet, le carré de sa norme vaut

$$\mathbf{t}^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$$

Il s'ensuit que la dérivée du vecteur $\mathbf{t}$ par rapport à la longueur ds définit un vecteur qui lui est orthogonal, ou bien est nul. En effet, utilisant la règle de Leibniz, on obtient

$$\frac{d}{ds}\,\mathbf{t}^2 = 2\frac{d\mathbf{t}}{ds}\cdot\mathbf{t} = 0, \quad \text{car} \quad \mathbf{t}^2 = 1 = \text{constante} \tag{1.5}$$

Le vecteur $d\mathbf{t}/ds$ est donc ou bien nul, ou bien *orthogonal* au vecteur $\mathbf{t}$ à tout instant et partout sur la trajectoire. Supposons qu'il ne soit pas nul. Ce n'est pas un vecteur unitaire, mais on peut définir un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ qui lui est colinéaire en posant

$$\rho\,\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{n}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{n} \tag{1.6}$$

Le facteur normalisateur $\rho(s)$, qui a la dimension d'une longueur, est appelé *rayon de courbure* de la trajectoire au point considéré. L'inverse de ρ, soit $1/\rho$, s'appelle tout simplement *courbure*, cette dénomination correspondant bien à notre perception intuitive du phénomène. Quand la dérivée $d\mathbf{t}/ds$ tend vers zéro, le vecteur $\mathbf{t}$ devient constant le long de la trajectoire qui devient donc une droite, et la courbure d'une droite est nulle. On peut aussi dire que le rayon de courbure de la trajectoire tend alors vers l'infini.

Dans le cas où le rayon de courbure reste constant et que le mouvement est plan, la trajectoire n'est autre qu'un cercle. Considérons par exemple le mouvement circulaire le plus simple, à vitesse *scalaire* v constante. Soit R le rayon du cercle, centré en O. Les coordonnées cartésiennes du point mobile seront alors données par les fonctions trigonométriques bien connues :

$$x = R\,\cos\omega t, \quad y = R\,\sin\omega t$$

On a donc

$$dx = -R\omega\sin\,\omega t\,dt, \quad dy = R\omega\cos\,\omega t\,dt$$

et alors

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = R^2\omega^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)\,dt^2 = R^2\omega^2 dt^2$$

ce qui définit l'élément de longueur du cercle comme $ds = R\omega dt$, la vitesse scalaire étant constante et égale à $v = \omega R$. Calculons le vecteur tangent $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} = \left[\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right] = [-\sin\omega t,\ \cos\omega t] \tag{1.7}$$

qui est bien évidemment unitaire puisque $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$. Maintenant, trouvons la dérivée $d\mathbf{t}/ds$ de ce vecteur :

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \left[\frac{-\omega\cos\omega t\ dt}{R\omega dt}, \frac{-\omega\sin\omega t\ dt}{R\omega dt}\right] = \frac{1}{R}\,[-\cos\omega t,\ -\sin\omega t]$$

En invoquant la définition du vecteur unitaire normal $\mathbf{n}$, on peut identifier

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{n} = \frac{1}{R}\,[-\cos\omega t,\ -\sin\omega t]$$

d'où, dans ce cas précis du mouvement uniforme sur un cercle de rayon R,

$$\rho = R, \quad \mathbf{n} = [-\sin\omega t,\ -\cos\omega t]$$

D'une façon générale, à partir des deux vecteurs $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$ ainsi définis, unitaires et mutuellement orthogonaux en tout point de la trajectoire, on constitue un repère mobile local en leur associant un troisième vecteur défini comme $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$, appelé *vecteur bi-normal*. Ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$ et lui-même unitaire. Les trois vecteurs ainsi définis forment le *repère de Frenet* (ou trièdre de Frenet), représenté sur la figure (1.3).

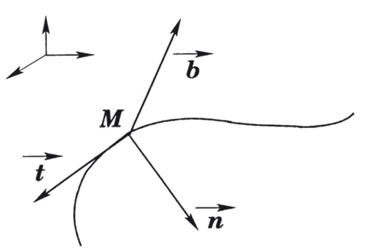

FIGURE 1.3 – Trièdre de Frenet. Les trois vecteurs sont : le vecteur tangent $\mathbf{t}$, le vecteur normal $\mathbf{n}$ et le vecteur bi-normal $\mathbf{b}$.

1.3 Vitesse et accélération en repère mobile.

Le repère de Frenet évolue dans le temps, accompagnant le point matériel dans son mouvement. Dans un avion en vol, on identifie facilement le vecteur **t** au vecteur unitaire colinéaire avec la vitesse instantanée ; le vecteur normal **n** est identifié au vecteur perpendiculaire au plan des ailes de l'avion et dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire. Précisons ce qu'on entend ici par “centre de courbure”. Un morceau infinitésimal de la trajectoire peut toujours être assimilé à un arc d'un cercle qui est tangent à la trajectoire en ce point et coïncidant avec la trajectoire sur ce parcours infinitésimal. Le centre de courbure de la trajectoire au point considéré est le centre de ce cercle, dont le rayon détermine le *rayon de courbure* de la trajectoire en ce point.

Voyons comment le vecteur accélération instantanée se décompose par rapport au trièdre de Frenet. D'après (1.6) la dérivée du vecteur vitesse ne peut avoir de composantes que le long de **t** et de **n**.

En effet, en dérivant la vitesse **v** par rapport au temps et en appliquant la formule de Leibniz, nous trouvons deux termes :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{dt} = a_t\,\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{1.8}$$

où l'on a posé $a_t = dv/dt = \dot{v}$. Compte-tenu de $ds/dt = v$, et en utilisant la définition (1.6) du vecteur normal **n** , on arrive à la formule suivante :

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{v}\,\mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho}\,\mathbf{n} = a_t\,\mathbf{t} + a_n\,\mathbf{n} \tag{1.9}$$

La composante a_t est *l'accélération tangentielle*, c'est-à-dire, la projection de **a** selon la direction du vecteur vitesse instantanée **v**, tandis que a_n est *l'accélération normale*, composante de **a** perpendiculairement à la vitesse instantanée.

La formule (1.6) définissant la dérivée par rapport à s du vecteur tangent **t** suggère qu'il doit y avoir aussi des formules pour les dérivées des deux vecteurs restants du trièdre de Frenet,

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds}$$

trièdre de Frénet de Frenet le long de la trajectoire, passant du point repéré par s au point infinitésimalement proche repéré par $s + \delta s$:

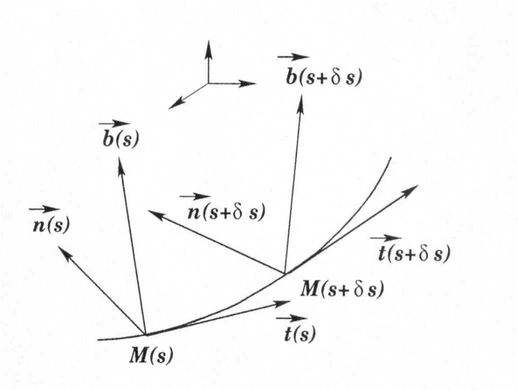

FIGURE 1.4 – Variation infinitésimale du trièdre de Frenet au cours du mouvement.

De façon évidente, dans le passage de s à $s + \delta s$, les vecteurs du trièdre de Frenet se transformeront selon les formules

$$\mathbf{t} \to \mathbf{t}' = \mathbf{t} + \frac{d\mathbf{t}}{ds}\,\delta s\ , \quad \mathbf{n} \to \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{ds}\,\delta s\ , \quad \mathbf{b} \to \mathbf{b}' = \mathbf{b} + \frac{d\mathbf{b}}{ds}\,\delta s \qquad (1.10)$$

Cependant, les relations d'orthogonalité et l'unitarité de chaque vecteur doivent rester en vigueur pour les trois nouveaux vecteurs obtenus après ce déplacement. C'est-à-dire que les *six* relations

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}\ , \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}\ , \quad \mathbf{t} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{b}\ ; \quad \mathbf{t}^2 = 1\ , \ \ \mathbf{n}^2 = 1\ , \ \ \mathbf{b}^2 = 1 \qquad (1.11)$$

doivent être reproduites en $s + \delta s$:

$$\mathbf{b}' = \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n}'\ , \quad \mathbf{n}' = \mathbf{b}' \wedge \mathbf{t}'\ , \quad \mathbf{t}' = \mathbf{n}' \wedge \mathbf{b}'\ ; \quad \mathbf{t}'^2 = 1\ , \ \ \mathbf{n}'^2 = 1\ , \ \ \mathbf{b}'^2 = 1 \quad (1.12)$$

Nous avons déjà vu que

$$\mathbf{t}' = \mathbf{t} + \frac{d\mathbf{t}}{ds}\,\delta s = \mathbf{t} + \frac{1}{\rho}\,\mathbf{n}\,\delta s$$

Pour trouver la dérivée $d\mathbf{b}/ds$, comparons deux définitions du vecteur $\mathbf{b}'$:

$$\mathbf{b}' = \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n}' = \left(\mathbf{t} + \frac{d\mathbf{t}}{ds}\,\delta s\right) \wedge \left(\mathbf{n} + \frac{d\mathbf{n}}{ds}\,\delta s\right)\ , \quad \text{et} \quad \mathbf{b}' = \mathbf{b} + \frac{d\mathbf{b}}{ds}\,\delta s$$

Comme toujours dans le calcul différentiel, on néglige le terme carré, proportionnel à $(\delta s)^2$, qui est d'ordre supérieur, ce qui conduit à l'équation

$$\mathbf{b}' = \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n}' \simeq \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} + \left(\frac{d\mathbf{t}}{ds} \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{n}}{ds}\,\delta s\right) = \mathbf{b} + \frac{d\mathbf{b}}{ds}\,\delta s \tag{1.13}$$

En identifiant les termes proportionnels à δs on trouve ainsi

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{n}}{ds} \tag{1.14}$$

Mais comme $d\mathbf{t}/ds$ est colinéaire à $\mathbf{n}$, le premier produit vectoriel est égal à 0. Il ne reste donc que

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{n}}{ds} \tag{1.15}$$

Le vecteur $\mathbf{b}$ étant unitaire, sa dérivée lui est orthogonale (ou nulle)

$$\frac{d\mathbf{b}^2}{ds} = 2\,\mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0$$

D'autre part, le produit vectoriel dans (1.15) est orthogonal au vecteur $\mathbf{t}$, ce qui finalement ne laisse au vecteur (1.14) qu'une seule composante non nulle, le long du vecteur normal $\mathbf{n}$. En conclusion, on doit avoir

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\,\mathbf{n} \tag{1.16}$$

Le coefficient τ s'appelle la *torsion* de la courbe ; le signe “moins” est choisi par convention, suivant le choix original de Frenet. Le vecteur $\mathbf{n}$ étant unitaire ($\mathbf{n}^2 = 1$), sa dérivée lui est orthogonale (ou nulle) et ne peut donc a priori avoir de composantes que selon $\mathbf{t}$ et $\mathbf{b}$. On écrit donc

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \alpha\,\mathbf{t} + \beta\,\mathbf{b}$$

Faisons le produit vectoriel de cette équation par le vecteur $\mathbf{t}$. Compte-tenu de (1.11) et du fait que $\mathbf{t} \wedge \mathbf{t} = 0$, on trouve

$$\mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{t} \wedge (\alpha\,\mathbf{t} + \beta\,\mathbf{b}) = \beta\,\mathbf{t} \wedge \mathbf{b} = -\beta\,\mathbf{n} \tag{1.17}$$

Mais nous avons vu plus haut (1.14, 1.16) que la même expression donne $-\tau\,\mathbf{n}$, ce qui permet d'identifier le coefficient β à τ. Il ne reste plus qu'à identifier la constante α. Pour ce faire, nous pouvons utiliser l'identité $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$ et la dériver :