

# Les intérêts simple

L'intérêt est le coût du service rendu au débiteur, le montant de l'intérêt dépend de l'importance du capital, de la durée et du taux de l'intérêt.

$$I = \text{CTN}/100 \text{ ou } \text{CTN}/1200 \text{ ou } \text{CTN}/36000$$

**EXEMPLE**

Soit un capital,  $C = 1\,000$  € est placé à 3,2 % pendant 122 jours.

**TRAVAIL À FAIRE**

Calculez l'intérêt généré par ce placement.

**SOLUTION**

$$I = 1\,000 \times 3,2 \times 122/36\,000 = 10,84 \text{ €}.$$

## I. Valeur acquise, valeur actuelle

### 1. Valeur acquise

On appelle valeur acquise par un capital la somme du capital placé et des intérêts, qu'il a produits pendant la durée du placement.

$$\text{Valeur acquise} = C + I$$

Calculez la valeur acquise de l'exemple précédent :

$$\text{Valeur acquise} = 1\,000 + 10,84 = 1\,010,84 \text{ €}.$$

### 2. Valeur actuelle

La valeur actuelle est égale au capital moins les intérêts générés par ce capital.

$$\text{Valeur actuelle} = C - I$$

Calculez la valeur actuelle de l'exemple précédent :

$$\text{Valeur actuelle} = 1\,000 - 10,84 = 989,16 \text{ €}.$$

## II. Equivalence d'effets

Deux effets (ou capitaux) sont équivalents à une date donnée (la date d'équivalence) si à cette date, ils ont la même valeur actuelle.

On utilise l'équivalence lorsqu'on veut remplacer un effet par un autre d'échéance différente, ou plusieurs effets de valeurs nominales et d'échéances différentes par un seul effet.

### 1. Equivalence de deux effets

La valeur actuelle du 1<sup>er</sup> effet doit être identique à celle de l'effet de remplacement à la date d'équivalence.

#### EXEMPLE

Un commerçant désire remplacer le 15 Avril un effet de 6 000 € d'échéance le 25 Avril par un autre échéant le 20 Mai.

#### TRAVAIL À FAIRE

Déterminez la valeur nominale de l'effet de remplacement sachant que le taux d'intérêt annuel est de 12 %.

#### SOLUTION

Ici la date d'équivalence est le 15 Avril.

La valeur actuelle du 1<sup>er</sup> effet à cette date est de :

$$6\,000 - (6\,000 \times 12 \times 10)/36\,000 = 5\,980.$$

La valeur actuelle de l'effet de remplacement au 15 Avril est :

$$C - (C \times 12 \times 35)/36\,000 = 0,99 C \text{ ou } 0,98833.$$

Il y a équivalence, si les deux valeurs actuelles sont égales :

$$5\,980 = 0,99C \rightarrow C = 6\,040,4 \text{ ou } 6\,050,60.$$

## 2. Equivalence de plusieurs effets

Un effet est équivalent à plusieurs effets si le jour d'équivalence sa valeur actuelle est égale à la somme des valeurs actuelles des autres effets.

### EXEMPLE

On veut remplacer le 10 Avril, deux effets X et Y par un effet unique de 4 250 € de nominal. Le taux d'intérêt est de 11 %.

- L'effet X a une valeur nominale de 1 980 € à échéance le 31 Mai.
- L'effet Y a une valeur nominale de 2 120 € à échéance le 10 Juin.

### TRAVAIL À FAIRE

Quelle est l'échéance de cet effet de remplacement ?

### SOLUTION

Soit  $n$ , le nombre de jours entre le 10 Avril et l'échéance de l'effet de remplacement.

Le 10 Avril, la valeur actuelle de cet effet est égale à la somme des valeurs actuelles des effets X et Y.

On a :

$$4\,250 - (4\,250 \times 11 \times n)/36\,000 = 1\,980 - (1\,980 \times 11 \times 51)/36\,000 + 2\,120 - (2\,120 \times 11 \times 61)/36\,000.$$

$$n = 170 \text{ jours.}$$

L'échéance commune se situe le 10 Avril + 170 jours = 27 septembre.

## CAS SIMPLE

### Dossier 1

Un capital de 12 000 € est placé à 8 %, un second capital de 14 000 € est placé à 5 %.

#### TRAVAIL À FAIRE

Au bout de combien de temps, ces deux capitaux auront-ils acquis la même valeur ?

### Dossier 2

Un capital est placé à 7,5 % pendant 52 jours, un second est placé à 6 % pendant 41 jours.

L'intérêt du premier capital est les  $\frac{7}{4}$  de celui du second et la somme des deux capitaux est de 56 000 €.

#### TRAVAIL À FAIRE

Calculez le montant de chaque capital.

### Dossier 3

Soit les effets suivants :

	A	B	C
Valeur nominale	4 200	3 700	1 950
Echéance	16 avril	25 mai	28 juin

On remplace le 11 mars, ces trois effets par un effet unique équivalent, échéant le 15 juin. Le taux annuel d'intérêt simple est de 9,5 %.

#### TRAVAIL À FAIRE

1. Quel est le montant de cet effet unique ?
2. En considérant que l'effet unique a une valeur nominale de 9 950 €, déterminez dans les mêmes conditions l'échéance commune de ces trois effets.
3. Quel serait l'échéance moyenne de ces effets ?

# Les intérêts composés

Ce système s'applique aux opérations financières de plus d'un an. À la fin de chaque période, les intérêts s'ajoutent au capital, les intérêts ainsi capitalisés produisent à leur tour des intérêts lors de la période suivante et ainsi de suite.

## I. Valeur acquise, valeur actuelle

### 1. Valeur acquise

La valeur acquise par le capital  $C_0$  après  $n$  périodes de placement :  $C_n = C_0 (1 + i)^n$ .

#### EXEMPLE

1. Soit un capital de 6 000 € placés à intérêts composés au taux annuel de 8 %.

#### TRAVAIL À FAIRE

Déterminez la valeur acquise de ce capital au bout de 6 ans et les intérêts.

#### SOLUTION

$$C_6 = 6\,000 (1,08)^6 = 9\,521,25 \text{ €.}$$

$$\text{Le montant des intérêts : } 9\,521,25 - 6\,000 = 3\,521,25.$$

2. Un capital de 20 000 € est placé à intérêts composés pendant 10 ans. La valeur acquise au bout de cette période s'élève à 47 347,27 €.

#### TRAVAIL À FAIRE

Quel est le taux de placement ?

#### SOLUTION

$$C_n = C_0 (1 + i)^n$$

$$47\,347,27 = 20\,000 (1 + i)^{10}$$

$$(1 + i)^{10} = 47\,347,27/20\,000 = 2,3673635$$

$$i = (47\,347,27/20\,000)^{1/10} - 1 = 9 \text{ \%}$$

**EXEMPLE**

3. Un capital de 15 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 11 %. Après capitalisation des intérêts, la valeur acquise s'élève à 31 142,40 €.

**TRAVAIL À FAIRE**

Quelle est la durée de la période de placement ?

**SOLUTION**

$$31\,142,4 = 15\,000 (1,11)^n$$

$$(1,11)^n = 2,07616$$

$$n \ln(1,11) = \ln 2,07616$$

$$n = 7 \text{ ans.}$$

## 2. Valeur actuelle

L'actualisation nous permet de savoir dans des conditions prédéterminées combien vaut aujourd'hui la somme que nous percevrons à la fin d'une certaine période.

L'actualisation est l'inverse de la capitalisation.

$$\text{Valeur actuelle} = C_n (1 + i)^{-n}$$

L'actualisation est nécessaire à cause de deux phénomènes économiques :

- l'inflation ;
- la préférence pour un capital présent « un tiens vaut mieux que deux tu l'auras ».

## II. Équivalence d'effets

Deux capitaux sont équivalents à intérêts composés, à une date déterminée s'ils ont à cette date la même valeur actuelle.

## III. Taux proportionnels, taux équivalents

### 1. Taux proportionnels

Les taux sont proportionnels lorsqu'ils sont proportionnels à la durée des périodes auxquelles ils s'appliquent. Le taux proportionnel au taux d'intérêt  $i$  est  $i/k$  avec  $k$  sous périodes de l'année.

Soit un taux annuel de 11,5 %.

#### TRAVAIL À FAIRE

Calculez les taux proportionnels mensuel, semestriel et trimestriel.

#### SOLUTION

$$i_m = 11,5/12 = 0,958 \%$$

$$i_s = 11,5/2 = 5,7 \%$$

$$i_t = 11,5/4 = 2,875 \%$$

## 2. Taux équivalents

Le taux  $i_k$  est équivalent au taux annuel  $i$  :  $(1 + i_k)^k = 1 + i$ , cette égalité nous permettra de trouver tous les taux équivalents.

Si  $i_a$  : taux annuel,  $i_s$  : taux semestriel, on a :

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2$$

$$1 + i_s = (1 + i_a)^{1/2} = 1 + i_a$$

$$i_s = (1 + i_a)^{1/2} - 1$$

Soit un taux annuel de 11,5 %, trouvez le taux semestriel et trimestriel équivalents.

#### SOLUTION

$$(1,115) = (1 + i_s)^2 \rightarrow i_s = 5,593.$$

$$(1,115) = (1 + i_t)^4 \rightarrow i_t = 2,758.$$

## CAS COMPO

### Dossier 1

Une personne place 15 000 € le 1/10/N-2 sur un compte d'épargne. Le 30/06/N-1, elle retire une partie. Le 30/11/N, elle dispose de 6 064,3 €.

#### TRAVAIL À FAIRE

Calculez la somme retirée le 30/06/N-1 avec un taux annuel de 4 %.

### Dossier 2

Soit le tableau suivant :

Taux annuel	9 %			
Taux semestriel		6 %		
Taux trimestriel			3,5 %	
Taux mensuel				1,25 %

#### TRAVAIL À FAIRE

Complétez le tableau avec les taux équivalents.

### Dossier 3

Soit un emprunt de 100 000 € à intérêts composés, au lieu de rembourser le capital et les intérêts 2 ans après comme convenu, votre créancier vous propose de payer à cette date 45 000 € seulement. Le reste serait sur 4 ans. Le taux d'intérêt est de 5 %. Vous acceptez l'offre.

#### TRAVAIL À FAIRE

1. Calculez le montant du dernier paiement.
2. Au moment du paiement vous connaissez des difficultés de trésorerie. Vous obtenez l'échelonnement de votre dette en deux versements égaux : la moitié dans 2 ans et l'autre moitié dans 3 ans au taux de 7 %.
3. Quel est le montant de deux nouveaux versements ?
4. Quel est le coût total du crédit ?