

Table des matières

1	Suites	1
I	Suites numériques	1
1	Définition	1
2	Convergence d'une suite infinie	2
3	Suites monotones et suites bornées	4
4	Cas des suites récurrentes	4
II	Suites de fonctions	5
1	Définition	5
2	Convergence simple	5
3	Convergence uniforme	5
4	Propriétés des suites uniformément convergentes	6
III	Exercices	7
2	Séries	25
I	Séries numériques	25
1	Généralités	25
2	Critères de convergence (série à termes positifs)	27
3	Série absolument convergente	28
4	Série alternée (série à termes réels)	29
5	Valeur approchée	29
II	Séries de fonctions	29
1	Définition	29
2	Exemple	30
3	Convergence uniforme	30
4	Continuité	31
5	Critères de convergence	31
6	Dérivabilité terme à terme	31
7	Intégrabilité terme à terme	31
III	Séries entières	32
1	Définition	32

	2	Théorème (Abel)	32
	3	Rayon de convergence	32
	4	Convergence uniforme	33
	5	Propriétés des séries entières	33
	6	Quelques séries entières	34
	7	Application aux équations différentielles	37
IV		Exercices	40
3		Séries de Fourier	57
I		Séries trigonométriques	58
	1	Définition	58
	2	Critère d'Abel	58
	3	Corollaire	58
	4	Exemple	59
II		Séries de Fourier	60
	1	Théorème (Dirichlet et Jordan)	60
	2	Coefficients de Fourier	63
	3	Fonction génératrice	64
	4	Exemple	64
III		Théorème (Bessel et Parseval)	66
	1	Le théorème	66
	2	Théorème énergétique	66
	3	Exemple	68
IV		Application aux problèmes de Dirichlet	69
	1	Généralités	69
	2	Exemple 1 : équation de la chaleur	69
	3	Exemple 2 : équation de Laplace	73
V		Quelques séries de Fourier usuelles	76
	1	Fonction créneau périodique	76
	2	Fonction créneau alterné périodique	76
	3	Fonction rampe périodique	77
	4	Fonction rampe antisymétrique périodique	77
	5	Fonction dent de scie périodique	77
	6	Fonction exponentielle périodique	78
	7	Fonction sinusoïde redressée	78
	8	Fonction demi sinusoïde	79
VI		Exercices	79

4	Transformation de Fourier	99
I	Généralités	100
1	Définition	100
2	Contre-exemple de la fonction de Heaviside	100
3	Exemple de la fonction porte	101
4	Cas d'une fonction bornée à support borné	101
II	Propriétés formelles élémentaires	101
1	Propriété 1 (linéarité)	101
2	Propriété 2 (translation en t)	102
3	Propriété 3 (translation en ν)	102
4	Propriété 4 (changement d'échelle)	102
5	Corollaire	102
III	Transformation de Fourier dans L^1	103
1	Définition	103
2	Théorème	103
3	Notes	104
4	Corollaire	104
5	Inversion dans $L^1(\mathbb{R})$	104
IV	Transformation de Fourier dans L^2	104
1	Définition	104
2	Inversion dans $L^2(\mathbb{R})$	105
3	Théorème (Parseval et Plancherel)	105
4	Corollaire	106
V	Transformation de Fourier dans S	106
1	Définition	106
2	Théorème	106
3	Formules de dérivation	107
VI	Représentations temporelle et fréquentielle	107
VII	Transformation de Fourier et convolution	108
1	Convolution sur la ligne réelle	108
2	Convolution dans L^1 , L^2 et S	110
VIII	Table de transformées de Fourier	111
IX	Applications	113
1	Théorème 1 (relation entre $c_n[f]$ et $\mathcal{F}[f_T]$)	113
2	Théorème 2 (inégalité d'incertitude)	114
X	Exercices	115
5	Transformation de Laplace	131
I	Définition et exemples	132
1	Définition	132
2	Notation	133

	3	Contre-exemple	133
	4	Exemples	133
II		Propriétés formelles élémentaires	134
	1	Propriété 1 (linéarité)	135
	2	Propriété 2 (changement d'échelle)	135
	3	Propriété 3 (translation en t)	135
	4	Propriété 4 (translation en s)	136
	5	Propriété 5 (dérivation en s)	136
	6	Propriété 6 (théorème des sauts)	136
	7	Corollaire	137
	8	Formule de la valeur initiale	138
	9	Formule de la valeur finale	139
III		Cas d'une fonction semi-périodique	139
	1	Définition	139
	2	Théorème	140
	3	Exemples	141
IV		Table de transformées de Laplace	142
	1	Table	142
	2	Tables et théorème du retard	144
	3	Tables et décomposition en éléments simples	144
V		Transformation de Laplace et convolution	148
	1	Définition	148
	2	Convolution de deux fonctions causales	148
	3	Propriété 1 (linéarité)	149
	4	Propriété 2 (commutativité)	149
	5	Théorème	150
VI		Applications	150
	1	Détermination de transformées de Fourier	150
	2	Détermination de coefficients de Fourier	150
	3	Résolution d'équations différentielles	151
	4	Résolution de systèmes d'équations différentielles	155
VII		Exercices	156
6		Calcul matriciel	175
I		Définitions	176
	1	Généralités sur les matrices	176
	2	Matrices associées à une matrice donnée	177
	3	Exemples	178
II		Opérations sur les matrices	179
	1	Multiplication d'une matrice par un scalaire	179
	2	Somme de deux matrices	179

	3	Produit de deux matrices	180
	4	Inverse d'une matrice carrée	182
	5	Matrices semblables	182
	6	Produit scalaire de deux vecteurs	182
	7	Norme d'un vecteur	183
	8	Angle de deux vecteurs	183
	9	Règles pour la somme et le produit de matrices	184
III		Matrices carrées particulières	185
	1	Matrice idempotente	185
	2	Matrice nilpotente	185
	3	Matrice symétrique, matrice antisymétrique	186
	4	Matrice hermitienne	186
	5	Matrice orthogonale	186
	6	Matrice unitaire	187
	7	Matrice normale	187
	8	Décomposition polaire	188
IV		Invariants d'une matrice	188
	1	Trace d'une matrice carrée	188
	2	Déterminant d'une matrice carrée	189
V		Détermination de l'inverse d'une matrice	192
	1	Théorème	192
	2	Calcul pratique de l'inverse	192
VI		Systèmes linéaires	194
	1	Transformation linéaire	194
	2	Système 2×2	195
	3	Système $m \times m$	196
	4	Changement de base	198
VII		Éléments propres d'une matrice	199
	1	Définition	199
	2	Détermination des valeurs propres	201
	3	Détermination des vecteurs propres	203
	4	Cas d'une matrice hermitienne	206
	5	Théorème (Cayley et Hamilton)	206
VIII		Réduction d'un endomorphisme	207
	1	Généralités	207
	2	Interprétation de la notion de matrice	209
	3	Diagonalisation d'une matrice	211
	4	Triangularisation d'une matrice	218
	5	Réduction d'une forme quadratique	220
	6	Décomposition de Jordan	224

	7	Décomposition en valeurs singulières	226
IX		Puissance et exponentielle d'une matrice	227
	1	Puissance d'une matrice	227
	2	Exemple	228
	3	Exponentielle d'une matrice	229
	4	Exemple	229
	5	Théorème	230
X		Application à des systèmes différentiels	230
	1	Généralités	230
	2	Procédure de calcul	231
	3	Exemple	232
XI		Exercices	234
7		Exercices et problèmes	267
	I	Série 1	267
	II	Série 2	273
	III	Série 3	279
	IV	Série 4	286
	V	Série 5	291
	VI	Série 6	296
	VII	Série 7	301
	VIII	Série 8	307
	IX	Série 9	313
		Bibliographie	319
		Index	321