

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Groupes monogènes. Groupes cycliques. Exemples</b>	<b>23</b>
1.1	Groupes monogènes . . . . .	23
1.2	Sous-groupes d'un groupe monogène . . . . .	25
1.2.1	D'un groupe monogène infini . . . . .	25
1.2.2	D'un groupe cyclique . . . . .	26
1.3	Exemples . . . . .	28
1.3.1	Produit de groupes cycliques . . . . .	28
1.3.2	Sur un corps fini . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications</b>	<b>31</b>
2.1	Permutations d'un ensemble fini . . . . .	31
2.2	Décomposition d'une permutation . . . . .	35
2.3	Signature . . . . .	36
2.4	Applications . . . . .	38
2.4.1	Théorème de Cayley . . . . .	38
2.4.2	Le jeu du taquin . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Anneau <math>\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}</math>. Applications</b>	<b>41</b>
3.1	L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ . . . . .	41
3.2	Applications . . . . .	43
3.2.1	Théorème des restes chinois . . . . .	43
3.2.2	Théorèmes d'Euler et de Fermat . . . . .	44
3.2.3	Théorème de Wilson . . . . .	45
3.2.4	Critère d'Eisenstein . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Nombres premiers</b>	<b>49</b>
4.1	Présentation . . . . .	49
4.2	Applications . . . . .	51

4.2.1	Théorèmes d'Euler et de Fermat . . . . .	51
4.2.2	Théorème de Wilson . . . . .	53
4.2.3	Système R.S.A. . . . .	53
4.2.4	Critère d'Eisenstein . . . . .	54
<b>5</b>	<b>PGCD dans <math>\mathbb{K}[X]</math>, où <math>\mathbb{K}</math> est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications</b>	<b>57</b>
5.1	Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	57
5.2	Théorème de Bézout . . . . .	60
5.3	Applications . . . . .	62
5.3.1	Théorème fondamental de l'arithmétique . . . . .	62
5.3.2	Lemme des noyaux . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs</b>	<b>67</b>
6.1	Dimension d'un espace vectoriel . . . . .	67
6.2	Relations entre les dimensions . . . . .	70
6.3	Rang d'une famille de vecteurs . . . . .	72
6.4	Carrés magiques . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples</b>	<b>75</b>
7.1	Formes linéaires et hyperplans . . . . .	75
7.2	Orthogonalité et dualité . . . . .	77
7.3	Formes linéaires et sous-espaces vectoriels . . . . .	81
7.4	Théorème de représentation de Fréchet-Riesz . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications</b>	<b>83</b>
8.1	Généralités . . . . .	83
8.2	Applications . . . . .	87
8.2.1	Équations différentielles . . . . .	87
8.2.2	Théorème de Cayley-Hamilton . . . . .	88
<b>9</b>	<b>Changements de bases en algèbre linéaire. Applications</b>	<b>91</b>
9.1	Changements de bases . . . . .	91
9.1.1	Matrices de passages . . . . .	91
9.1.2	Matrices équivalentes . . . . .	93
9.1.3	Matrices semblables . . . . .	95
9.2	Applications . . . . .	96

---

9.2.1	Diagonalisation d'une matrice carrée . . . . .	96
9.2.2	Trigonalisation d'une matrice carrée . . . . .	97
9.2.3	Calcul des puissances d'une matrice carrée . . . . .	99
9.2.4	Suites récurrentes linéaires à coefficients constants . . . . .	100
<b>10</b>	<b>Déterminants. Applications</b>	<b>103</b>
10.1	Déterminant d'une matrice . . . . .	103
10.1.1	Généralités . . . . .	103
10.1.2	Matrice de permutation . . . . .	106
10.1.3	Matrice triangulaire . . . . .	107
10.2	Calculs de déterminants . . . . .	108
10.2.1	Déterminant d'un produit . . . . .	108
10.2.2	Développement suivant une ligne ou une colonne . . . . .	109
10.3	Applications . . . . .	112
10.3.1	Déterminant de Vandermonde . . . . .	112
10.3.2	Formule de Cramer . . . . .	113
10.3.3	Inverse d'une matrice . . . . .	115
<b>11</b>	<b>Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.</b>	
	<b>Applications</b>	<b>117</b>
11.1	Opérations élémentaires et propriétés . . . . .	117
11.2	Applications . . . . .	121
11.2.1	Calcul du rang d'une matrice . . . . .	121
11.2.2	Résolution d'un système linéaire . . . . .	122
11.2.3	Calcul de l'inverse d'une matrice . . . . .	123
11.2.4	Déterminant de Vandermonde . . . . .	124
11.2.5	Décomposition LU d'une matrice . . . . .	126
<b>12</b>	<b>Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2,</b>	
	<b>de dimension 3</b>	<b>129</b>
12.1	Généralités . . . . .	129
12.2	Cas de la dimension 2 . . . . .	133
12.3	Cas de la dimension 3 . . . . .	135
<b>13</b>	<b>Utilisation des nombres complexes en géométrie</b>	<b>141</b>
13.1	Nombres complexes et géométrie . . . . .	141
13.2	Deux lieux géométriques . . . . .	142
13.3	Similitudes directes . . . . .	144
13.4	Quelques théorèmes . . . . .	145

13.4.1	Caractérisation d'un triangle équilatéral . . . . .	145
13.4.2	Caractérisation de la cocyclicité . . . . .	146
13.4.3	Théorème de Ptolémée . . . . .	147
13.4.4	Théorème de Napoléon . . . . .	147
13.4.5	Théorème de Van Aubel . . . . .	148
<b>14</b>	<b>Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Applications</b>	<b>151</b>
14.1	Généralités . . . . .	151
14.2	Réduction . . . . .	153
14.3	Applications . . . . .	155
14.3.1	Endomorphisme symétrique sur l'espace des polynômes . . . . .	155
14.3.2	Racine cubique d'une matrice symétrique réelle . . . . .	156
14.3.3	Endomorphismes symétriques positifs . . . . .	158
14.3.4	Décomposition polaire . . . . .	160
<b>15</b>	<b>Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d'un espace euclidien. Applications géométriques</b>	<b>163</b>
15.1	Réduction d'une forme quadratique . . . . .	164
15.2	Classification des formes quadratiques réelles . . . . .	167
15.3	Applications géométriques . . . . .	170
15.3.1	Classement des coniques . . . . .	170
15.3.2	Extremum d'une fonction de plusieurs variables . . . . .	172
<b>16</b>	<b>Isométries du plan affine euclidien, formes réduites. Applications</b>	<b>175</b>
16.1	Groupe des isométries du plan affine . . . . .	175
16.2	Classification des isométries du plan affine . . . . .	176
16.3	Applications . . . . .	179
16.3.1	Expression complexe . . . . .	179
16.3.2	Groupe diédral . . . . .	181
<b>17</b>	<b>Barycentres. Applications</b>	<b>183</b>
17.1	Fonction vectorielle de Leibniz . . . . .	183
17.2	Applications . . . . .	186
17.2.1	Caractérisation des applications affines . . . . .	186
17.2.2	Théorème de Ceva . . . . .	187
17.2.3	Fonction scalaire de Leibniz . . . . .	188
17.2.4	Théorème de Gauss-Lucas . . . . .	189
17.2.5	Fonction convexe . . . . .	189

---

<b>18 Applications affines en dimension finie. Propriétés et exemples</b>	<b>191</b>
18.1 Généralités . . . . .	191
18.2 Homothéties et translations . . . . .	194
18.3 Projecteurs et symétries . . . . .	197
18.4 Points fixes d'une application affine . . . . .	199
<b>19 Droites et cercles dans le plan affine euclidien</b>	<b>201</b>
19.1 Droites du plan affine euclidien . . . . .	201
19.2 Cercles du plan affine euclidien . . . . .	204
19.3 Lignes de niveau . . . . .	207
19.4 Inversion . . . . .	208
<b>20 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes</b>	<b>211</b>
20.1 L'algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ . . . . .	211
20.2 Dérivation de polynômes . . . . .	214
20.3 Théorème fondamental de l'algèbre . . . . .	218
20.4 Relations coefficients-racines . . . . .	220
<b>21 Notion de rang en algèbre linéaire. Applications</b>	<b>223</b>
21.1 Rang d'une famille de vecteurs . . . . .	223
21.2 Rang d'une application linéaire . . . . .	224
21.3 Rang d'une matrice . . . . .	226
21.4 Applications . . . . .	229
21.4.1 Systèmes linéaires . . . . .	229
21.4.2 Interpolation de Lagrange . . . . .	229
21.4.3 Somme de deux applications linéaires . . . . .	230
21.4.4 Règle de Hörner . . . . .	230
<b>22 Coniques</b>	<b>233</b>
22.1 Définitions monofocales . . . . .	233
22.2 Équations cartésiennes . . . . .	234
22.3 Représentations paramétriques . . . . .	236
22.4 Équation polaire . . . . .	237
22.5 Définitions bifocales . . . . .	238
22.6 Réduction des coniques . . . . .	239

<b>23 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications</b>	<b>245</b>
23.1 Généralités . . . . .	245
23.2 Diagonalisation . . . . .	249
23.3 Trigonalisation . . . . .	251
23.4 Décomposition de Jordan-Dunford . . . . .	252
23.5 Applications . . . . .	255
23.5.1 Calcul des puissances d'une matrice carrée . . . . .	255
23.5.2 Suites récurrentes linéaires simultanées du premier ordre à coefficients constants . . . . .	256
23.5.3 Système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants . . . . .	256
<b>24 Systèmes linéaires. Applications</b>	<b>257</b>
24.1 Généralités sur les systèmes linéaires . . . . .	257
24.2 Applications . . . . .	262
24.2.1 Avec un paramètre . . . . .	262
24.2.2 Inversion d'une matrice . . . . .	263
24.2.3 Points alignés . . . . .	264
24.2.4 Points coplanaires . . . . .	265
24.2.5 Droites concourantes ou parallèles . . . . .	266
24.2.6 Que la lumière soit . . . . .	267
<b>25 Valeurs propres. Recherche et utilisation</b>	<b>269</b>
25.1 Recherche des valeurs propres . . . . .	269
25.2 Utilisation des valeurs propres . . . . .	273
25.2.1 Diagonalisation d'un endomorphisme . . . . .	273
25.2.2 Théorème spectral et conséquences . . . . .	275
25.2.3 Points fixes d'une application affine . . . . .	278
<b>26 Arithmétique dans <math>\mathbb{Z}</math></b>	<b>281</b>
26.1 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ . . . . .	281
26.2 PGCD et PPCM de deux entiers relatifs . . . . .	282
26.3 Équations diophantiennes . . . . .	285
26.4 Nombres premiers . . . . .	286
<b>27 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications</b>	<b>289</b>
27.1 Généralités . . . . .	289
27.2 Applications . . . . .	293

27.2.1	Groupe des symétries du cube . . . . .	293
27.2.2	Combinatoire . . . . .	295
27.2.3	Groupes finis . . . . .	297
27.2.4	Théorème de Cauchy . . . . .	298
<b>28</b>	<b>Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications</b>	<b>299</b>
28.1	Endomorphisme diagonalisable . . . . .	299
28.2	Applications . . . . .	302
28.2.1	Décomposition de Jordan-Dunford . . . . .	302
28.2.2	Calcul des puissances d'une matrice carrée . . . . .	304
28.2.3	Suites récurrentes linéaires simultanées du premier ordre à coefficients constants . . . . .	306
28.2.4	Système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants . . . . .	308
<b>29</b>	<b>Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications</b>	<b>311</b>
29.1	Généralités . . . . .	311
29.2	Décomposition en éléments simples . . . . .	314
29.3	Applications . . . . .	317
29.3.1	Quelques décompositions en éléments simples . . . . .	317
29.3.2	Un calcul de primitive . . . . .	317
29.3.3	Un calcul de somme . . . . .	318
<b>30</b>	<b>Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications</b>	<b>319</b>
30.1	Groupe des nombres complexes de module 1 . . . . .	319
30.2	Racines de l'unité . . . . .	322
30.3	Applications . . . . .	324
30.3.1	Calculs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ . . . . .	324
30.3.2	Racines $n$ -èmes d'un nombre complexe . . . . .	325
30.3.3	Triangle équilatéral dans le plan . . . . .	325
30.3.4	Calculs de sommes . . . . .	326
<b>31</b>	<b>Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients- racines</b>	<b>327</b>
31.1	Racines d'un polynôme à une indéterminée . . . . .	327
31.2	Relations coefficients-racines . . . . .	331
31.3	Applications . . . . .	332

31.3.1	Calcul d'une fonction symétrique . . . . .	332
31.3.2	Résoudre un système d'équations algébriques symétriques . . . . .	332
31.3.3	Zéros de polynômes dérivés successifs . . . . .	333
31.3.4	Théorème de Joachimsthal . . . . .	334
<b>32</b>	<b>Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications</b>	<b>335</b>
32.1	Suites récurrentes d'ordre 1 . . . . .	335
32.2	Méthode de Newton . . . . .	338
32.3	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 . . . . .	340
<b>33</b>	<b>Séries à termes réels positifs. Applications</b>	<b>345</b>
33.1	Étude de la convergence . . . . .	345
33.1.1	Critères de convergence . . . . .	345
33.1.2	Condition nécessaire de convergence . . . . .	347
33.2	Quelques outils . . . . .	348
33.2.1	Test intégral . . . . .	348
33.2.2	Comparaisons directe et logarithmique . . . . .	349
33.2.3	Règles de Cauchy et de d'Alembert . . . . .	351
33.2.4	Règle de Raabe-Duhamel . . . . .	353
33.3	Formule de Stirling . . . . .	354
<b>34</b>	<b>Séries à termes ou complexes : convergence absolue, semi-convergence</b>	<b>357</b>
34.1	Convergence absolue et semi-convergence . . . . .	357
34.2	Théorème d'Abel . . . . .	359
34.3	Opérations sur les séries . . . . .	361
34.3.1	Commutativité . . . . .	361
34.3.2	Associativité . . . . .	362
34.3.3	Distributivité . . . . .	364
<b>35</b>	<b>Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications</b>	<b>367</b>
35.1	Normes usuelles . . . . .	367
35.2	Applications linéaires . . . . .	369
35.3	Compacité . . . . .	370
35.3.1	Généralités . . . . .	370
35.3.2	En dimension finie . . . . .	371

<b>36</b>	<b>Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation de fonctions</b>	<b>375</b>
36.1	Produit scalaire et orthogonalité . . . . .	375
36.2	Projection orthogonale . . . . .	378
36.3	Séries de Fourier . . . . .	381
<b>37</b>	<b>Parties compactes de <math>\mathbb{R}^n</math>. Fonctions continues sur de telles parties. Exemples et applications</b>	<b>383</b>
37.1	Parties compactes de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	383
37.1.1	Deux définitions équivalentes . . . . .	383
37.1.2	Caractérisation . . . . .	385
37.2	Fonctions continues sur un compact . . . . .	386
37.3	Applications . . . . .	387
37.3.1	Équivalence des normes en dimension finie . . . . .	387
37.3.2	Théorème de Rolle . . . . .	388
37.3.3	Théorème fondamental de l'algèbre . . . . .	389
37.3.4	Théorème de Riesz . . . . .	390
<b>38</b>	<b>Théorème des valeurs intermédiaires. Applications</b>	<b>393</b>
38.1	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	393
38.2	Applications . . . . .	396
38.2.1	Théorème des cordes universelles . . . . .	396
38.2.2	Théorème du point fixe . . . . .	397
38.2.3	Théorèmes de la moyenne . . . . .	397
38.2.4	Théorème de Darboux . . . . .	398
38.2.5	Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	399
<b>39</b>	<b>Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples</b>	<b>401</b>
39.1	Différents modes de convergence . . . . .	401
39.2	Propriétés de la somme . . . . .	406
39.2.1	Continuité . . . . .	406
39.2.2	Intégration . . . . .	406
39.2.3	Dérivation . . . . .	407
<b>40</b>	<b>Séries entières de variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples</b>	<b>411</b>
40.1	Convergence d'une série entière . . . . .	411
40.2	Propriétés de la fonction somme . . . . .	414
40.3	Convergence au bord . . . . .	417

<b>41 Séries de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme.</b>	
<b>Exemples</b>	<b>421</b>
41.1 Approche géométrique . . . . .	421
41.2 Convergence uniforme en moyenne de Cesàro . . . . .	424
41.3 Convergence en moyenne quadratique . . . . .	427
41.4 Convergence simple . . . . .	428
41.5 Synthèse et exemples . . . . .	429
<b>42 Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre <math>\pi</math></b>	<b>433</b>
42.1 Exponentielle complexe . . . . .	433
42.2 Fonctions trigonométriques . . . . .	436
42.3 Résolution de $\sin(z) = a$ où $a \in \mathbb{R}$ . . . . .	438
42.4 Le nombre $\pi$ en géométrie . . . . .	439
42.5 Détermination principale du logarithme . . . . .	440
<b>43 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications</b>	<b>443</b>
43.1 Cas d'une fonction monotone . . . . .	443
43.2 Cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ . . . . .	446
43.3 Applications . . . . .	447
43.3.1 Équivalent des sommes partielles d'une série divergente . . . . .	447
43.3.2 Constante d'Euler-Mascheroni . . . . .	448
43.3.3 Formule de Stirling . . . . .	448
43.3.4 Évaluation du reste d'une série convergente . . . . .	450
<b>44 Théorème des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles. Applications</b>	<b>451</b>
44.1 Fonction d'une variable réelle . . . . .	451
44.2 Fonction de plusieurs variables réelles . . . . .	454
44.3 Applications . . . . .	455
44.3.1 Variations d'une fonction . . . . .	455
44.3.2 Théorème limite de la dérivée . . . . .	456
44.3.3 Quelques théorèmes . . . . .	457
<b>45 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications</b>	<b>461</b>
45.1 Généralités . . . . .	461
45.2 Caractérisation géométrique . . . . .	463
45.3 Caractérisation par les pentes . . . . .	464
45.4 Caractérisation par la dérivée . . . . .	466
45.5 Applications . . . . .	467

45.5.1 Classement des moyennes . . . . .	467
45.5.2 Inégalités de Hölder et Minkowski . . . . .	467
45.5.3 Intégrale d'une fonction convexe . . . . .	469
<b>46 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications</b>	<b>471</b>
46.1 Formule de Taylor-Young . . . . .	471
46.2 Formules de Taylor-Lagrange . . . . .	473
46.3 Applications . . . . .	475
46.3.1 Déterminer une limite . . . . .	475
46.3.2 Comportement local d'une fonction . . . . .	475
46.3.3 Développement en série entière . . . . .	476
46.3.4 Inégalités de Kolmogorov . . . . .	478
<b>47 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples</b>	<b>481</b>
47.1 Existence d'une fonction réciproque . . . . .	481
47.2 Continuité d'une fonction réciproque . . . . .	482
47.3 Dérivabilité d'une fonction réciproque . . . . .	483
47.4 Réciproque d'une fonction circulaire . . . . .	485
47.5 Réciproque d'une fonction hyperbolique . . . . .	488
<b>48 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur</b>	<b>493</b>
48.1 Méthode des rectangles . . . . .	493
48.2 Méthode du point milieu . . . . .	495
48.3 Méthode des trapèzes . . . . .	496
48.4 Méthode de Simpson . . . . .	498
<b>49 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de <math>\mathbb{R}</math> (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples</b>	<b>501</b>
49.1 Présentation de l'intégrale impropre . . . . .	501
49.2 Propriétés de l'intégrale impropre . . . . .	504
49.3 Comparaison . . . . .	507
49.4 Critère d'Abel . . . . .	509
<b>50 Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications</b>	<b>511</b>
50.1 Intégrale sur un compact . . . . .	511
50.2 Intégrale impropre . . . . .	515

50.3	Fonction gamma d'Euler . . . . .	519
50.4	Transformée de Laplace . . . . .	520
<b>51</b>	<b>Équations différentielles linéaires d'ordre 2 : <math>x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)</math>, où <math>a, b, c</math> sont des fonctions continues sur un intervalle de <math>\mathbb{R}</math>, à valeurs réelles ou complexes</b>	<b>521</b>
51.1	Généralités . . . . .	522
51.2	Résolution de l'équation homogène . . . . .	524
51.2.1	Connaissant une base de $\mathcal{S}_0$ . . . . .	524
51.2.2	Méthode de Lagrange . . . . .	525
51.3	Résolution de l'équation générale . . . . .	526
51.3.1	Connaissant une solution particulière . . . . .	526
51.3.2	Méthode de variation des constantes . . . . .	526
51.4	Problème de raccords . . . . .	527
51.5	Utilisation des séries entières . . . . .	528
51.6	Zéros de solutions . . . . .	529
<b>52</b>	<b>Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples</b>	<b>531</b>
52.1	Généralités . . . . .	531
52.2	Solution générale de $(E_0)$ . . . . .	533
52.3	Solution particulière de $(E)$ . . . . .	536
52.3.1	Variation des constantes . . . . .	536
52.3.2	Principe de superposition des solutions . . . . .	538
52.4	Intervention de l'exponentielle de matrice . . . . .	539
<b>53</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classes <math>C^1</math>. Exemples</b>	<b>541</b>
53.1	Différentiabilité . . . . .	541
53.2	Propriétés . . . . .	545
53.3	Applications continûment différentiables . . . . .	548
<b>54</b>	<b>Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles. Applications</b>	<b>551</b>
54.1	Étude à l'ordre 1 . . . . .	551
54.2	Étude à l'ordre 2 . . . . .	552
54.3	Cas des fonctions de deux variables réelles . . . . .	555
54.4	Extremum global . . . . .	557
54.5	Applications . . . . .	558

54.5.1	La vallée mystérieuse . . . . .	558
54.5.2	Triangle inscrit dans une ellipse . . . . .	558
54.5.3	Extremum sur un compact . . . . .	559
<b>55</b>	<b>Suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli.</b>	
	<b>Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale</b>	<b>561</b>
55.1	Loi de Bernoulli et loi binomiale . . . . .	562
55.2	Théorème de Bernoulli . . . . .	564
55.3	Théorème de Stone-Weierstrass . . . . .	566
55.4	Approximations de la loi binomiale . . . . .	567
<b>56</b>	<b>Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Variance, covariance. Exemples</b>	<b>571</b>
56.1	Probabilité conditionnelle et indépendance . . . . .	572
56.2	Variables aléatoires indépendantes . . . . .	574
56.3	Variance et covariance . . . . .	575
56.4	Exemples . . . . .	579
	56.4.1 Probabilités et arithmétique . . . . .	579
	56.4.2 Somme de variables de Poisson . . . . .	580
<b>57</b>	<b>Espérance, variance ; loi faible des grands nombres</b>	<b>581</b>
57.1	Espérance et variance d'une variable aléatoire . . . . .	581
57.2	Quelques lois usuelles . . . . .	585
57.3	Loi faible des grands nombres . . . . .	588
<b>58</b>	<b>Variables aléatoires possédant une densité. Exemples</b>	<b>591</b>
58.1	Généralités . . . . .	591
58.2	Exemples . . . . .	595
	58.2.1 Loi uniforme . . . . .	595
	58.2.2 Loi exponentielle . . . . .	596
	58.2.3 Loi normale . . . . .	596
58.3	Inégalités . . . . .	598
<b>59</b>	<b>Intégrales et primitives</b>	<b>599</b>
59.1	Théorème fondamental de l'analyse . . . . .	599
59.2	Calculs d'intégrales . . . . .	602
	59.2.1 Méthode de l'intégration par parties . . . . .	602
	59.2.2 Méthode du changement de variable . . . . .	603

59.3 Applications . . . . .	604
59.3.1 Formule de Taylor avec reste intégral . . . . .	604
59.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange . . . . .	605
<b>60 Inégalités en analyse et en probabilités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Markov, Bessel, convexité...</b>	<b>607</b>
60.1 En analyse . . . . .	607
60.1.1 Convexité . . . . .	607
60.1.2 Classement des moyennes . . . . .	609
60.1.3 Inégalités de Hölder et Minkowski . . . . .	610
60.1.4 Projection orthogonale dans un espace préhilbertien complexe .	612
60.1.5 Inégalité des accroissements finis . . . . .	613
60.2 En probabilités . . . . .	613
<b>61 Couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples d'utilisation</b>	<b>615</b>
61.1 Généralités . . . . .	615
61.2 Variance, covariance et corrélation linéaire . . . . .	616
61.3 Exemples . . . . .	622
<b>62 Étude métrique des courbes planes</b>	<b>625</b>
62.1 Longueur d'une courbe plane . . . . .	625
62.2 Abscisse curviligne . . . . .	627
62.3 Courbure . . . . .	629
<b>63 Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie</b>	<b>633</b>
63.1 Convergence . . . . .	633
63.2 Complétude . . . . .	635
63.3 Compacité . . . . .	638
<b>64 Fonctions développables en série entière</b>	<b>641</b>
64.1 Généralités . . . . .	641
64.2 Opérations . . . . .	644
64.3 Fonctions élémentaires usuelles . . . . .	645
64.4 Fonction exponentielle complexe . . . . .	646
64.5 Nombres de Catalan . . . . .	647

---

<b>65 Applications linéaires continues, normes associées. Exemples</b>	<b>649</b>
65.1 Caractérisation des applications linéaires continues . . . . .	649
65.2 Équivalence des normes . . . . .	651
65.3 Cas des formes linéaires . . . . .	652
65.4 Cas des applications bilinéaires . . . . .	652
65.5 Norme subordonnée d'une application linéaire continue . . . . .	653
<b>66 La fonction Gamma</b>	<b>659</b>
66.1 Étude de la fonction . . . . .	660
66.2 Propriétés . . . . .	663
66.3 Équivalents aux bornes . . . . .	666
<b>Annexes</b>	<b>669</b>
Quelques dérivées usuelles . . . . .	669
Quelques primitives usuelles . . . . .	670
Quelques développements limités usuels . . . . .	671
Quelques formules trigonométriques . . . . .	672
Plan d'étude d'une courbe paramétrée . . . . .	673
Plan d'étude d'une courbe polaire . . . . .	674
Décomposition d'une matrice . . . . .	675
Diagonalisation et trigonalisation d'une matrice . . . . .	675
Quelques groupes classiques . . . . .	676
Groupe cyclique . . . . .	676
Groupe symétrique . . . . .	676
Groupe général linéaire . . . . .	677
Groupe orthogonal . . . . .	678
Groupe affine . . . . .	679
<b>Bibliographie</b>	<b>681</b>
<b>Index</b>	<b>683</b>