

- 2 -

Ce problème comporte deux parties indépendantes A et B.

A

QUELQUES CARACTÉRISTIQUES D'UNE MACHINE THERMIQUE

On se propose de déterminer quelques caractéristiques thermodynamiques et mécaniques d'une machine thermique ditherme à but didactique fonctionnant suivant le cycle dit de Stirling.

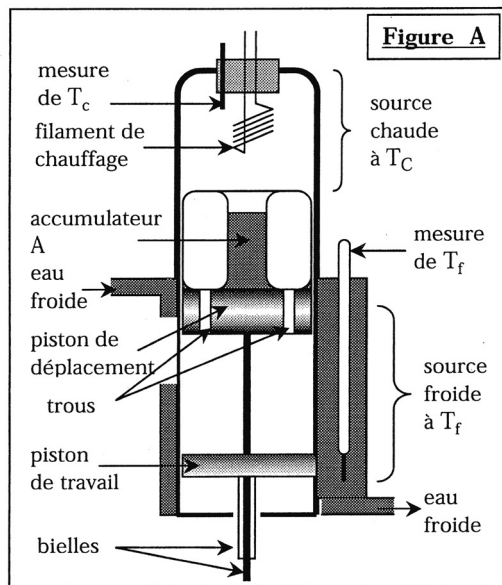
Dans son principe (Figure A), la machine comprend un cylindre, un piston de déplacement Pd , un piston de travail Pt , ainsi qu'un accumulateur d'énergie A et enfermant une masse donnée constante d'un gaz actif en l'occurrence ici de l'air. Un filament métallique parcouru par un courant chauffe l'air dans la partie supérieure du cylindre à la température T_c et la partie inférieure est en contact avec la source froide, à température T_f (refroidissement assuré par une circulation d'eau en continu dans une chemise entourant la partie inférieure du piston de travail).

Le piston de déplacement est percé d'orifices permettant un déplacement dans les deux sens de l'air enfermé entre la partie supérieure du cylindre chauffé et la partie inférieure refroidie à l'eau.

Les deux pistons sont reliés à l'arbre de rotation du moteur par l'intermédiaire d'un jeu d'embellages tel qu'un cycle corresponde à une rotation d'un tour complet de l'arbre.

Le cycle de Stirling est modélisé suivant les quatre évolutions théoriques:

- *Compression isotherme* de ❶ à ❷ à la température T_f de la source froide par la montée du piston de travail P_t du volume V_1 jusqu'au volume V_2 ,
- *Chauffage isochore* de ❷ à ❸ jusqu'à la température T_c de la source chaude par la descente du piston de déplacement qui envoie le gaz à travers l'accumulateur A.
- *Détente isotherme* à T_c de ❸ à ❹ jusqu'au volume initial V_1 par la descente des deux pistons.
- *Refroidissement isochore* de ❹ à ❶ jusqu'à la température T_f par la remontée du piston de déplacement seul, forçant le gaz à traverser une nouvelle fois l'accumulateur, cette fois de haut en bas et en cédant de la chaleur.



- 3 -

Les grandeurs massiques associées aux grandeurs extensives (V, U, H, S ...) seront notées en lettres minuscules : v, u, h, s...

On rappelle l'identité thermodynamique : $du = T ds - Pdv$.

Le gaz actif utilisé dans la machine thermique est de l'air, assimilé à un gaz parfait de capacité thermique massique à volume constant c_v supposée indépendante de la température et de rapport $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ constant. On rappelle que $c_v = \frac{r}{(\gamma-1)}$ où $r = \frac{R}{M}$ est la constante massique du gaz étudié, R désignant la constante des gaz parfait et M la masse molaire équivalente de l'air. On prendra $\gamma = 1,4$.

A.1. Préliminaires : le diagramme entropique ; le cycle de Carnot.

A.1.1.a. Proposer en quelques lignes une définition du mot *chaleur* (ou *transfert thermique*).

A.1.1.b. Proposer en quelques lignes une réponse à donner à un élève de classe terminale scientifique qui a rencontré dans un article de vulgarisation le terme *entropie* et souhaite connaître le sens de ce mot.

A.1.1.c. On appelle diagramme entropique le diagramme $T(s)$ donnant en ordonnée la température thermodynamique T (en kelvin) en fonction de l'entropie massique s du fluide.

On considère une évolution réversible représentée par l'arc de courbe MM' dans le diagramme entropique. Que représente l'aire sous la courbe MM' ?

A.1.1.d. On considère maintenant l'évolution cyclique réversible d'une masse donné quelconque. On appelle diagramme de Clapeyron, le diagramme $P(v)$ donnant en ordonnée la pression P au sein du fluide en fonction du volume massique v du fluide. Que représente l'aire du cycle dans le diagramme de Clapeyron ? Justifier que les aires du cycle en coordonnées $P(v)$ et $T(s)$ sont égales.

A.1.2. On étudie plus particulièrement le cycle de Carnot, constitué de deux isothermes (à T_f et T_c , avec $T_f < T_c$) séparées par deux adiabatiques réversibles.

A.1.2.a. Tracer l'allure du cycle de Carnot dans le diagramme entropique et préciser en justifiant la réponse le sens de parcours sur le cycle pour un fonctionnement en moteur thermique.

A.1.2.b. Définir le rendement thermodynamique η d'un moteur thermique. Dans le cas du cycle de Carnot, montrer qu'il s'écrit simplement comme un rapport d'aires dans le diagramme entropique qu'on précisera. En déduire que $\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$.

A.1.3.a. Déduire de l'identité thermodynamique rappelée plus haut l'expression de la différentielle ds de l'entropie massique d'un gaz parfait de capacité thermique massique c_v et de constante massique r , en fonction de T , v , r et c_v .

A.1.3.b. Établir dans le diagramme entropique l'équation $T(s)$ d'une évolution isochore pour l'air considéré comme un gaz parfait.

Tournez la page S.V.P.

- 4 -

A.2. Le cycle de Stirling idéal

A.2.1. Tracer l'allure du cycle de Stirling à air dans le diagramme entropique. Montrer que $s_3 - s_2 = s_4 - s_1$.

A.2.2. Le transfert thermique du tronçon 4-1 au tronçon 2-3 est effectué à l'aide d'opérations qui sont décalées dans le temps, cela par stockage interposé, à l'aide de l'accumulateur A. On suppose que ce récupérateur fonctionne de façon idéale et réversible, de sorte que l'énergie thermique stockée par l'accumulateur lors de l'évolution 4-1 est intégralement redonnée au gaz lors de l'évolution 2-3.

A.2.2.a. Comment doit-on choisir la capacité thermique et la conductibilité thermique de l'accumulateur A pour que son fonctionnement se rapproche le plus possible du cas idéal.

A.3. Rendement du cycle de Stirling réel.

Le gaz cède à l'accumulateur A la chaleur $q_E = -q_{4-1}$ lors du refroidissement isochore.

L'accumulateur fonctionnant avec une efficacité α réduite ($\alpha < 1$), seule une partie αq_E est redonnée au gaz lors de l'échauffement isochore 2-3, de sorte que la source chaude doit apporter au gaz le complément de chaleur $(1 - \alpha)q_E$.

L'aire du cycle n'est pas modifiée par cet échange de chaleur incomplet.

A.3.1. Exprimer le rendement réel $\eta_{\text{réel}}$ du cycle à échangeur imparfait et l'écrire sous la forme :

$$\eta_{\text{réel}} = \frac{\eta_{\text{Carnot}}}{1 + f(a, \alpha, \gamma, k)}, \text{ où } f \text{ est une fonction de } \gamma, \alpha, a \text{ et } k \text{ seulement avec } a = \frac{V_1}{V_2} \text{ et } k = \frac{T_f}{T_c}.$$

A.3.2. Pour une efficacité α de l'accumulateur, un rapport volumétrique a et un rapport des températures k fixés, comment varie $\eta_{\text{réel}}$ avec γ ? En justifiant la réponse, indiquer s'il vaut mieux utiliser un gaz monoatomique ou diatomique pour optimiser le rendement.

A.3.3. La source chaude du moteur Stirling est obtenue par le chauffage d'un filament porté au rouge, parcouru par un courant alternatif sinusoïdal. La résistance à froid du filament est d'environ $0,9 \Omega$. On mesure simultanément la tension aux bornes du filament et l'intensité du courant qui le traverse par la méthode "ampèremètre - voltmètre".

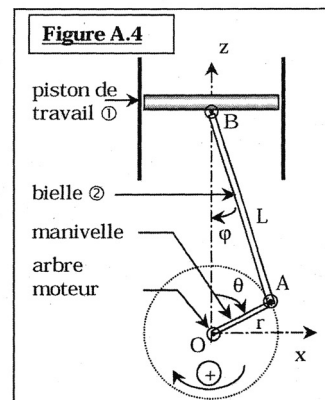
On lit $U_{\text{eff}} = 11,70 \text{ V}$ et $I_{\text{eff}} = 12,20 \text{ A}$.

A.3.3.a. Préciser en justifiant la réponse s'il vaut mieux réaliser un montage courte dérivation ou un montage longue dérivation. On indiquera sur un schéma la position des différents éléments. Calculer la puissance électrique moyenne reçue par le filament.

A.3.3.b. Lors d'un essai du moteur à air chaud (pour lequel on prendra $\gamma = 1,4$), on a mesuré : $T_f = 293 \text{ K}$; $T_c = 533 \text{ K}$, $a = 1,6$, une fréquence de rotation de l'arbre moteur $f = 6,3 \text{ Hz}$, pour une aire du cycle évaluée à $6,1 \text{ joules}$ en valeur absolue. Calculer le rendement thermodynamique du moteur ainsi que l'efficacité α de l'accumulateur.

A.4. Étude cinématique du système bielle-manivelle.

La transformation du mouvement rectiligne du piston de travail en un mouvement de rotation de l'arbre moteur est assuré par un embiellage comportant (figure A.4) :



- 5 -

- le piston de travail ① pouvant glisser sans frottement à l'intérieur du cylindre. Le point B du piston est astreint à se déplacer suivant l'axe Oz. On note $OB = z$. On confondra la surface du piston et la section S du cylindre.
- une barre AB appelée bielle ②, de longueur L. Les liaisons pivot en A et B sont supposées parfaites.
- un vilebrequin modélisé par une barre AO, ou manivelle ③, de longueur $OA = r$, en liaison pivot parfaite en O sur l'axe de l'arbre moteur.

L'étude est menée dans le repère trièdre direct (O, x, y, z) lié au référentiel R_0 du bâti du moteur, supposé galiléen.

La manivelle est repérée par l'angle θ , le sens positif choisi étant celui de θ croissant. On fixe l'instant $t = 0$ tel que $\theta = 0$.

L'arbre moteur tourne à la vitesse angulaire ω constante de 380 tours/min.

On rappelle que pour α réel et $|\epsilon| \ll 1$, $(1+\epsilon)^\alpha = 1 + \alpha \epsilon$ à des termes en ϵ^2 près.

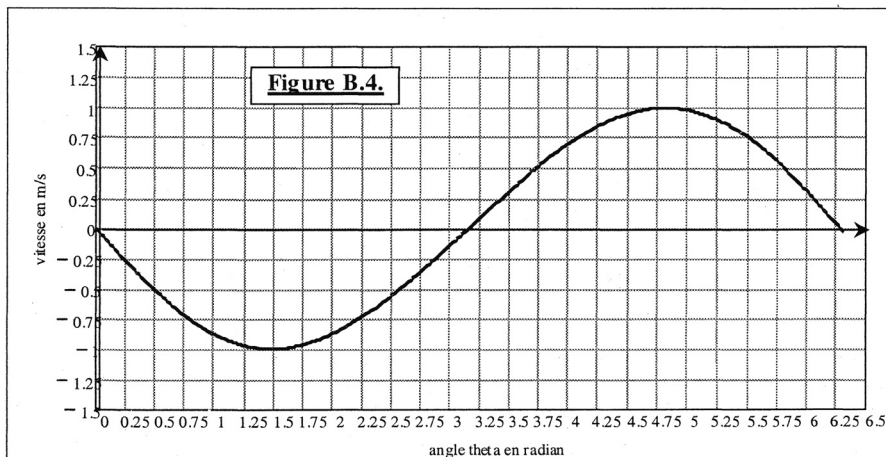
A.4.1. Trouver la relation liant r , L , $\sin(\theta)$ et $\sin(\varphi)$. En déduire l'expression de $z(t)$ en fonction de r , L et θ seulement.

A.4.2. Le rapport r/L vaut environ 1/10. Montrer que la vitesse v_p du piston est de la forme:

$$v_p \approx A_1 \sin(\omega t) + A_2 \sin(2\omega t).$$

On exprimera A_1 et A_2 en fonction de L , r et ω .

A.4.3. La figure B.4. montre les variations de la vitesse en fonction de l'angle θ , pour θ compris entre 0 et 2π . Déduire du graphe $v(\theta)$ l'accélération maximale du piston en valeur absolue et commenter la valeur obtenue. Quelles précautions convient-il de prendre pour la réalisation du système bielle – manivelle ?



Tournez la page S.V.P.

- 6 -

B

OSCILLATEURS ELECTRIQUES

Les différentes questions de cette partie sont, dans une large mesure, indépendantes mais il est vivement conseillé de les traiter dans l'ordre proposé.

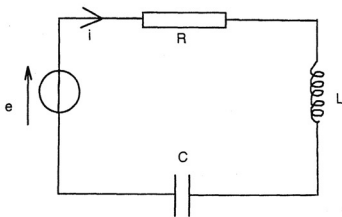
B.1. Le circuit RLC série

Figure 1

Soit (figure 1) un circuit comportant un conducteur ohmique de résistance R , une bobine idéale d'inductance propre L , et un condensateur de capacité C , disposés en série avec une source idéale de tension de f.é.m (ou t.é.m)

$e = E\sqrt{2} \cos(\omega t)$. On étudie la réponse de ce circuit en régime forcé sinusoïdal de fréquence $f = \omega/2\pi$.

B.1.1.

Définir les termes : régime forcé, régime transitoire, régime libre.

B.1.2.

Décrivez qualitativement les transferts énergétiques se produisant dans un circuit RLC en distinguant le rôle des divers composants.

B.1.3.

Déterminer l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit, et en déduire la puissance moyenne $P(\omega)$ dissipée dans la résistance.

B.1.4. On introduit les notations : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q_0 = \frac{L\omega_0}{R}$.

Quelles sont les dimensions de ω_0 et de Q_0 ? Montrer que $P(\omega)$ peut se mettre sous la forme :

$$P(\omega) = \frac{P_{\max}}{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

Que vaut P_{\max} ? Interpréter ce résultat.

B.1.5. Un tracé (non demandé) de la courbe $P(\omega)$ montre que $P(\omega) \geq \frac{P_{\max}}{2}$ pour ω compris dans un intervalle $[\omega_1, \omega_2]$.

Nous appellerons *facteur de qualité* du circuit le rapport $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$. Vérifier que $Q = Q_0$.

B.1.6. Quelle est la valeur du facteur de qualité d'un circuit pour lequel :

$L = 9 \text{ mH}$, $C = 1 \text{ } \mu\text{F}$ et $R = 2,5 \text{ } \Omega$?

- 7 -

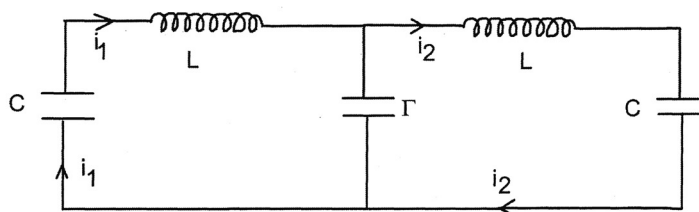
B.2. Un exemple de circuits couplés. Notion de modes propres

Figure 2

Le montage de la figure 2 comporte deux oscillateurs électriques identiques : soit deux branches ayant même inductance L et même capacité C , couplées par un condensateur de capacité Γ . Dans une approche simplificatrice nous supposons les résistances des branches nulles dans l'étude qui suit.

Grâce à des jeux d'interrupteurs permettant *des liaisons non représentées* avec des sources de tension continue, il est possible de choisir les valeurs initiales (à la date $t = 0+$) des charges des condensateurs, et des courants i_1 et i_2 définis sur la fig.2.

Nous nous intéressons au régime libre observable pour des dates positives ($t > 0$), à partir de conditions initiales à priori quelconques.

B.2.1.

Établir que les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ obéissent aux équations différentielles formant le système (I) suivant :

$$(I) = \begin{cases} L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{\Gamma} \right) i_1 - \frac{i_2}{\Gamma} = 0 \\ L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{\Gamma} \right) i_2 - \frac{i_1}{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

B.2.2. Un mode propre du système est un état particulier tel que les grandeurs électriques $i_1(t)$ et $i_2(t)$ soient des fonctions sinusoïdales de même pulsation. Vu la symétrie du système (I) il est judicieux de rechercher ces modes propres en introduisant les fonctions $\xi(t) = i_1(t) + i_2(t)$ et $\eta(t) = i_1(t) - i_2(t)$.

B.2.2.a) Trouver les équations différentielles vérifiées par $\xi(t)$ et par $\eta(t)$, et constater que les solutions générales associées peuvent se mettre sous la forme :

$$\xi(t) = A \cos(\omega' t + \varphi') \quad \text{et} \quad \eta(t) = B \cos(\omega'' t + \varphi'')$$

où A , B , φ' et φ'' sont des constantes dépendant des conditions initiales. Donner les expressions des pulsations propres ω' et ω'' en fonction de L , C et/ou Γ .

B.2.2.b) En déduire les solutions générales $i_1(t)$ et $i_2(t)$ associées à des conditions initiales quelconques, et constater qu'il s'agit d'une superposition de deux modes propres, l'un (M') associé à la pulsation propre ω' et l'autre (M'') associé à la pulsation propre ω'' .

B.2.2.c) Que dire de i_1 et de i_2 lorsque le circuit de la figure 2 oscille sur le mode (M') ? Quelle est alors l'influence de la capacité Γ ? Peut-on retrouver la valeur de ω' par une analyse simple du circuit ?

Tournez la page S.V.P.

- 8 -

B.2.3. Le montage de la figure 2 a été réalisé avec des bobines disponibles au lycée, avec les valeurs affichées par le constructeur : $L = 9 \text{ mH}$, $r = 2,5 \Omega$, et des capacités $C = 1 \mu\text{F}$, $\Gamma = 1 \mu\text{F}$ obtenues avec des boîtes étalonnées. Pour ces valeurs sont représentées ci-dessous les chronogrammes concernant les évolutions temporelles de tensions, non précisées, aux bornes de certains condensateurs. La figure 3a) concerne une évolution sur le mode (M') et la figure 3b) est relative au mode (M'').

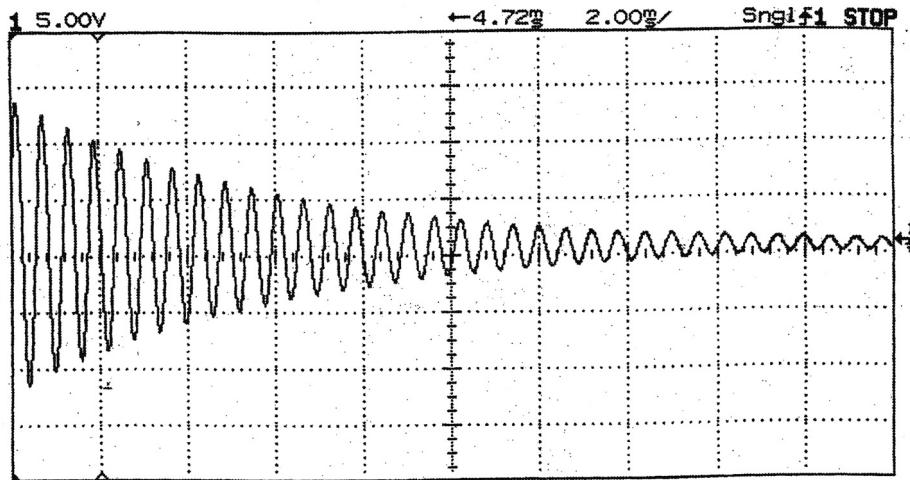


Figure 3a Mode (M') Balayage : 2,00 ms/carreau

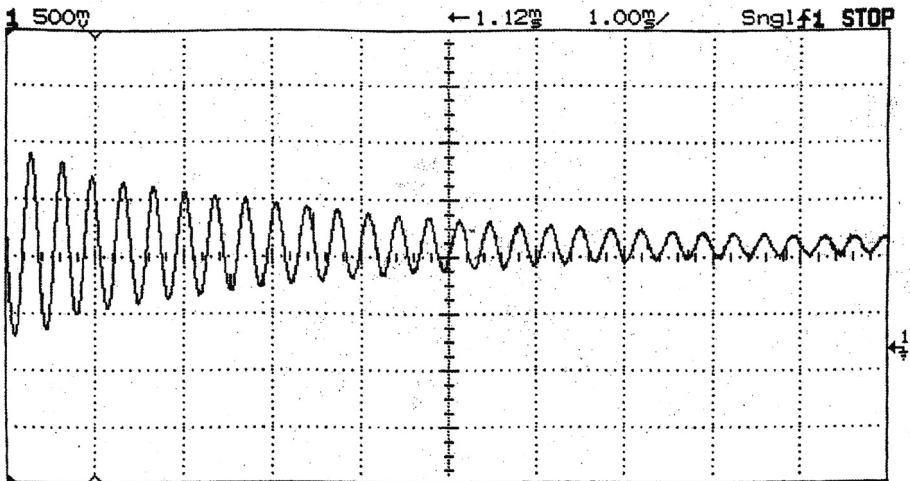


Figure 3b Mode (M'') Balayage : 1,00 ms/carreau

B.2.3.a) Qualitativement : pourquoi peut-on raisonnablement penser qu'il s'agit pour chacun des cas d'évolution sur un mode propre, et à quoi doit-on attribuer la décroissance de l'amplitude des oscillations observées ?

- 9 -

B.2.3.b) Donner une estimation des fréquences f_{exp}^+ et f_{exp}^- calculables à partir des chronogrammes, la vitesse de balayage de la base de temps étant précisée sur l'écran. Comparer ces résultats aux valeurs théoriques et conclure.

B.2.4. Le chronogramme de la figure 5 traduit les évolutions expérimentales des tensions $v_A(t)$ et $v_B(t)$, l'origine des tensions étant prise en M et les points A et B étant définis sur la figure 4.

Ce nouveau montage a été réalisé avec les mêmes bobines ($L = 9 \text{ mH}$, $r = 2,5 \Omega$), les mêmes valeurs $C = 1 \mu\text{F}$, mais avec un condensateur de couplage de nouvelle capacité $\Gamma = 10 \mu\text{F}$ (qui remplace donc l'ancienne valeur $1 \mu\text{F}$ du montage précédent).

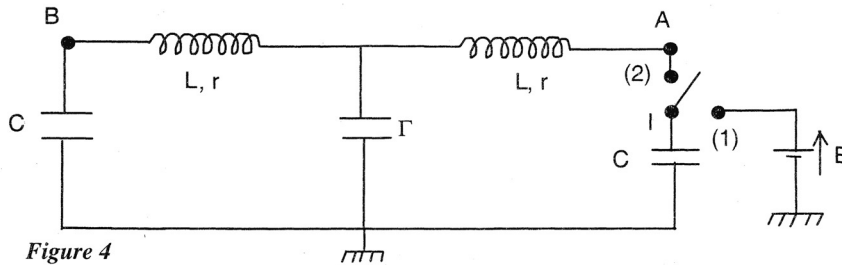


Figure 4

$L = 9 \text{ mH}$; $r = 2,5 \Omega$; $C = 1 \mu\text{F}$; $\Gamma = 10 \mu\text{F}$.

L'interrupteur à point milieu I (fig.4) est, pour $t < 0$, relié à une source de tension continue de f.é.m E de l'ordre de 2 V : position (1).

Il est basculé en position (2) à compter de la date $t = 0$, et les tensions $v_A(t)$ et $v_B(t)$ sont alors obtenues à l'oscilloscope (mode monocoup ou single) selon la figure 5 ci-dessous.

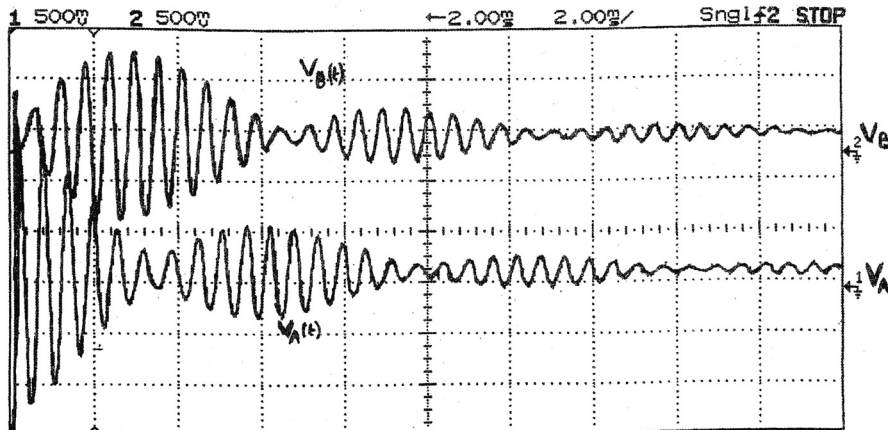


Figure 5 Tensions $v_A(t)$ et $v_B(t)$ Balayage : $2,00 \text{ ms/carreau}$

B.2.4.a) Outre l'amortissement déjà constaté auparavant, on observe un phénomène nouveau. Quel nom lui attribuez-vous ?

Tournez la page S.V.P.