

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Mesurabilité et intégration</b>	<b>19</b>
1.1	Espace de probabilité . . . . .	19
1.1.1	Définition : espace de probabilité . . . . .	19
1.1.2	Définition : tribu . . . . .	20
1.1.3	Proposition : toute intersection de tribus est une tribu . . . . .	21
1.1.4	Définition : tribu engendrée . . . . .	21
1.1.5	Définition : probabilité . . . . .	22
1.1.6	Proposition : règles du calcul des probabilités . . . . .	22
1.1.7	Définition : événements indépendants . . . . .	23
1.1.8	Définition : probabilité conditionnée . . . . .	23
1.1.9	Exercice : bal masqué . . . . .	24
1.1.10	Exercice : lemme de Borel-Cantelli . . . . .	24
1.2	Applications mesurables . . . . .	24
1.2.1	Définition : applications mesurables . . . . .	24
1.2.2	Proposition : fonction étagée et mesurabilité . . . . .	25
1.2.3	Proposition : critère de mesurabilité de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{B})$ . . . . .	25
1.2.4	Proposition : critère de mesurabilité de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ . . . . .	26
1.2.5	Proposition : mesurabilité des limites . . . . .	27
1.2.6	Proposition : approximation par les fonctions étagées . . . . .	27
1.2.7	Définition : tribu engendrée par une famille d'applications . . . . .	28
1.2.8	Proposition : factorisation des applications mesurables . . . . .	28
1.3	Espérance d'une variable aléatoire réelle . . . . .	30
1.3.1	Définition : variable aléatoire . . . . .	30
1.3.2	Définition : espérance mathématique . . . . .	30
1.3.3	Lemme technique . . . . .	31
1.3.4	Exercice : convergence PS et convergence dans $L^1$ . . . . .	32
1.3.5	Exercice : convergence stochastique . . . . .	33
1.3.6	Définition : tribus et variables aléatoires indépendantes . . . . .	33
1.3.7	Proposition : espérance d'un produit de VAR indépendantes . . . . .	33
1.3.8	Définition : loi image . . . . .	35
1.3.9	Proposition : intégration relativement à la loi image . . . . .	35
1.3.10	Exemples de lois images discrètes . . . . .	36
1.3.11	Définition : densité . . . . .	37
1.3.12	Proposition : intégration relativement à la densité . . . . .	37

1.3.13	Proposition : densité et fonction de répartition . . . . .	38
1.3.14	Proposition : caractérisation de la loi exponentielle . . . . .	38
1.3.15	Exercice : attente à un rendez-vous . . . . .	39
1.3.16	Exercice : variable gaussienne . . . . .	39
1.4	Uniforme Intégrabilité . . . . .	39
1.4.1	Définition : famille de VAR uniformément intégrable . . . . .	40
1.4.2	Définition : famille de VAR équi-intégrable . . . . .	40
1.4.3	Proposition : critère d'uniforme intégrabilité . . . . .	40
1.4.4	Théorème : convergence en probabilité et convergence dans $L^1$ . . . . .	41
1.5	Théorème des classes monotones . . . . .	44
1.5.1	Définition : $\pi$ -système . . . . .	44
1.5.2	Définition : classe monotone ou $\delta$ -système . . . . .	44
1.5.3	Lemme des classes monotones . . . . .	44
1.5.4	Premier théorème des classes monotones (TCM1) . . . . .	45
1.5.5	Deuxième théorème des classes monotones (TCM2) . . . . .	46
1.6	Complément : intégrale de Daniel . . . . .	47
1.6.1	Construction de l'intégrale de Daniel . . . . .	47
1.6.2	Ensembles intégrables et mesurables . . . . .	60
1.6.3	Intégrale de Lebesgue . . . . .	63
1.7	Complément : théorèmes de Hahn-Banach et de Zorn . . . . .	66
1.7.1	Théorème de Hahn-Banach . . . . .	66
1.7.2	Théorème de Zorn . . . . .	71
1.8	Solutions des exercices . . . . .	75
<b>2</b>	<b>Transformée de Fourier</b> . . . . .	<b>83</b>
2.1	Transformée de Fourier, fonction caractéristique . . . . .	83
2.1.1	Définition : transformée de Fourier . . . . .	83
2.1.2	Proposition : développement d'une fonction caractéristique . . . . .	85
2.1.3	Transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^d$ . . . . .	86
2.1.4	Proposition : continuité de la transformée de Fourier . . . . .	87
2.2	Convergence des mesures . . . . .	88
2.2.1	Définition : convergence étroite et convergence en loi . . . . .	88
2.2.2	Définition : convergence faible . . . . .	88
2.2.3	Proposition : relation entre convergence faible et étroite . . . . .	89
2.2.4	Proposition : convergence des probabilités . . . . .	89
2.2.5	Proposition : convergence en probabilité et convergence en loi . . . . .	92
2.2.6	Définition : partie totale d'un EVN . . . . .	94
2.2.7	Proposition : critère de convergence faible . . . . .	94
2.2.8	Théorème : compacité faible des suites de mesures . . . . .	94
2.2.9	Définition : famille tendue de mesures . . . . .	95
2.2.10	Proposition : suite tendue et convergence étroite . . . . .	95
2.3	Convolution . . . . .	96
2.3.1	Définition et proposition : convolution de fonctions et transformée de Fourier . . . . .	96
2.3.2	Proposition : la transformée de Fourier est <i>caractéristique</i> . . . . .	97
2.3.3	Définition : convolution de deux mesures . . . . .	100

2.3.4	Définition : convolution d'une mesure et d'une fonction . . . . .	100
2.3.5	Proposition : convergence vers l'identité d'un produit de convolution . . . . .	101
2.3.6	Lemme : une identité remarquable de convolution . . . . .	102
2.4	Transformée de Fourier et convergence des mesures . . . . .	102
2.4.1	Théorème : convergence simple des transformées de Fourier . . . . .	102
2.4.2	Proposition : inversion de la transformée de Fourier . . . . .	104
2.4.3	Théorème de Lévy . . . . .	105
2.5	Complément : vecteur gaussien . . . . .	106
2.6	Complément : théorème de Stone-Weierstrass . . . . .	110
2.7	Complément : théorème de Riesz . . . . .	114
2.7.1	Topologie des espaces métrisables localement compacts . . . . .	114
2.7.2	Tribu et topologie . . . . .	117
2.7.3	Théorèmes de Riesz . . . . .	118
<b>3</b>	<b>Espérance conditionnelle, temps d'arrêt</b>	<b>123</b>
3.1	Espérance conditionnelle . . . . .	123
3.1.1	Définition : espérance conditionnelle . . . . .	124
3.1.2	Proposition : condition d'orthogonalité . . . . .	124
3.1.3	Définition : espérance conditionnée par une VAR . . . . .	125
3.1.4	Définition : factorisation de l'espérance conditionnée . . . . .	125
3.1.5	Exercice : conditionnement par une tribu atomique . . . . .	125
3.1.6	Exercice : conditionnement par une VAR continue . . . . .	126
3.1.7	Exercice : espérance conditionnelle d'un vecteur gaussien . . . . .	126
3.1.8	Proposition : propriétés de l'espérance conditionnelle . . . . .	126
3.1.9	Exercice : famille $\mathbb{E}(X   \mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$ . . . . .	128
3.2	Loi conditionnée . . . . .	128
3.2.1	Définition : probabilité de transition . . . . .	128
3.2.2	Définition : loi conditionnée . . . . .	128
3.2.3	Proposition : intégration par rapport à une loi conditionnée . . . . .	128
3.2.4	Théorème d'intégration successive (Fubini) . . . . .	129
3.2.5	Exercice : exemple de calcul conditionné . . . . .	129
3.2.6	Exercice : indépendance et factorisation . . . . .	130
3.3	Temps d'arrêt . . . . .	130
3.3.1	Définition : filtration et temps d'arrêt . . . . .	130
3.3.2	Proposition et définition : tribu d'un temps d'arrêt . . . . .	131
3.3.3	Proposition : mesurabilité de $X_\tau$ . . . . .	131
3.3.4	Proposition : temps d'entrée d'un processus à temps continu . . . . .	131
3.4	Solution des exercices . . . . .	132
<b>4</b>	<b>Martingales à temps discret</b>	<b>137</b>
4.1	Martingales, intégrale stochastique discrète . . . . .	137
4.1.1	Définition : martingales et S-martingales . . . . .	137
4.1.2	Exercice : exemples de martingales . . . . .	138
4.1.3	Définition : intégrale stochastique discrète . . . . .	138
4.1.4	Proposition : l'intégrale stochastique conserve les martingales . . . . .	139

4.2	Convergence presque sûre des S-martingales . . . . .	139
4.2.1	Définition : nombre de traversées montantes . . . . .	139
4.2.2	Exercice : lemme des traversées . . . . .	139
4.2.3	Théorème : convergence PS des S-martingales bornées dans $L^1$ . . . . .	140
4.3	Convergence dans $L^1$ des S-martingales . . . . .	141
4.3.1	Définition : S-martingale fermée à droite . . . . .	141
4.3.2	Théorème : convergence dans $L^1$ des S-martingales UI . . . . .	142
4.3.3	Exercice : convergence dans $L^1$ des martingales UI . . . . .	142
4.3.4	Exercice : loi de 0 et 1 de Kolmogorov . . . . .	143
4.3.5	Exercice : décomposition de Doob . . . . .	143
4.4	Inégalité de Doob dans $L^p$ . . . . .	143
4.4.1	Proposition : inégalité de Doob dans $L^p$ . . . . .	143
4.4.2	Proposition : convergence des martingales $L^p$ . . . . .	144
4.4.3	Exercice : convergence dans $L^2$ . . . . .	145
4.5	Arrêt et échantillonnage . . . . .	145
4.5.1	Définition : processus arrêté et variable d'arrêt . . . . .	145
4.5.2	Théorème : une S-martingale arrêtée est une S-martingale . . . . .	145
4.5.3	Théorème : échantillonnage des S-martingales par des temps d'arrêt bornés (TAB) . . . . .	145
4.5.4	Théorème : échantillonnage des S-martingales UI . . . . .	146
4.6	Introduction aux modèles financiers . . . . .	146
4.6.1	Définition : stratégie financière . . . . .	146
4.6.2	Définition : marché financier sans arbitrage . . . . .	146
4.6.3	Définition : stratégie financière prévisible autofinancée . . . . .	147
4.6.4	Proposition : les prix actualisés sont des martingales . . . . .	147
4.6.5	Définition : option . . . . .	147
4.6.6	Proposition : pricing d'une option . . . . .	148
4.7	Complément : sur-martingales inverses . . . . .	148
4.8	Complément : inégalité de Doob . . . . .	151
4.9	Complément : échantillonnage . . . . .	153
4.10	Solution des exercices . . . . .	154
<b>5</b>	<b>Martingales à temps continu</b> . . . . .	<b>157</b>
5.1	Régularisation des S-martingales . . . . .	157
5.1.1	Définition : martingales, S-martingales . . . . .	157
5.1.2	Définition : application et processus régularisable . . . . .	157
5.1.3	Proposition : régularisation des S-martingales : première partie . . . . .	157
5.1.4	Proposition : régularisation d'une application . . . . .	158
5.1.5	Définition : processus régularisé . . . . .	158
5.1.6	Définitions : conditions usuelles . . . . .	158
5.1.7	Proposition : régularisation des S-martingales : deuxième partie . . . . .	159
5.1.8	Exercice : mouvement brownien . . . . .	159
5.2	Convergence des S-martingales <i>cadlag</i> . . . . .	160
5.2.1	Théorème : convergence PS des S-martingales <i>cadlag</i> bornées dans $L^1$ . . . . .	160
5.2.2	Définition : S-martingale fermée à droite . . . . .	160

5.2.3	Théorème : convergence dans $L^1$ des S-martingales <i>cadlag</i> UI .	161
5.2.4	Proposition : cas particulier des martingales . . . . .	161
5.2.5	Proposition : martingale définie par projections . . . . .	162
5.3	Inégalité de Doob dans $L^p$ . . . . .	162
5.3.1	Proposition : inégalité de Doob dans $L^p$ . . . . .	162
5.3.2	Proposition : convergence des martingales dans $L^p$ . . . . .	163
5.4	Arrêt et échantillonnage . . . . .	163
5.4.1	Théorème : une S-martingale arrêtée est une S-martingale . . .	163
5.4.2	Théorème : échantillonnage des S-martingales <i>cadlag</i> UI . . . .	163
5.4.3	Théorème : échantillonnage des S-martingales par des TAB . .	163
5.5	Martingale de carré intégrable . . . . .	164
5.5.1	Exercice : deux formules . . . . .	164
5.5.2	Exercice : fermeture à droite des martingales de $\mathcal{M}^2b$ . . . . .	164
5.5.3	Exercice : $\mathcal{M}^2b$ est un espace de Banach . . . . .	164
5.5.4	Exercice : convergence dans $\mathcal{M}^2b$ et dans $L^2$ . . . . .	164
5.6	Complément : régularisation des S-martingales . . . . .	165
5.7	Complément : arrêt et échantillonnage . . . . .	168
5.8	Complément : processus gaussien . . . . .	172
5.9	Complément : complétions . . . . .	174
5.10	Solution des exercices . . . . .	177
<b>6</b>	<b>Intégrale de Lebesgue-Stieltjes</b>	<b>179</b>
6.1	Variation des fonctions . . . . .	179
6.1.1	Définition : subdivision d'un segment . . . . .	179
6.1.2	Définition : variation d'une fonction sur un segment . . . . .	179
6.1.3	Définition : fonctions à variations finies . . . . .	180
6.1.4	Proposition : continuité de la variation d'une fonction continue	180
6.1.5	Proposition : différence de deux applications croissantes . . . .	181
6.2	Intégrale de Lebesgue-Stieltjes des fonctions . . . . .	182
6.2.1	Proposition et définition : intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à une fonction croissante . . . . .	182
6.2.2	Proposition : continuité et variation de l'intégrale par rapport à une fonction croissante . . . . .	183
6.2.3	Définition : intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à une fonction à variation finie . . . . .	183
6.2.4	Proposition : continuité et variation de l'intégrale par rapport à une fonction à variation finie . . . . .	184
6.3	Ensemble et processus progressivement mesurables . . . . .	184
6.3.1	Proposition et définition : tribu des ensembles progressifs . . .	184
6.3.2	Proposition : un processus <i>cad</i> ou <i>cag</i> est progressif . . . . .	185
6.3.3	Proposition : adaptabilité de l'intégrale par rapport à un processus croissant . . . . .	186
6.3.4	Corollaire : adaptabilité de l'intégrale par rapport à un processus à variation finie . . . . .	186
6.4	Complément : mesures signées . . . . .	187

<b>7</b>	<b>Variation des martingales</b>	<b>193</b>
7.1	Variation des martingales . . . . .	193
7.1.1	Proposition : adaptabilité et continuité de la variation d'un processus . . . . .	193
7.1.2	Proposition : martingale continue à variation bornée . . . . .	193
7.2	Variation quadratique des martingales continues . . . . .	195
7.2.1	Définition : variation quadratique d'un processus . . . . .	195
7.2.2	Théorème de décomposition de Doob-Meyer . . . . .	196
7.2.3	Exercice : variation quadratique du mouvement brownien . . . . .	196
7.3	Covariation des martingales continues . . . . .	197
7.3.1	Définition : covariation d'un couple de processus . . . . .	197
7.3.2	Proposition : décomposition d'un produit de martingales . . . . .	197
7.3.3	Proposition : inégalité de Kunita et Watanabe . . . . .	198
7.3.4	Exercice : covariation d'un mouvement brownien . . . . .	200
7.4	Démonstration du théorème de Doob-Meyer . . . . .	201
7.5	Solution des exercices . . . . .	209
<b>8</b>	<b>Intégrale stochastique</b>	<b>213</b>
8.1	Mesure associée à une martingale . . . . .	213
8.1.1	Définition : espace des martingales bornées dans $L^2$ . . . . .	213
8.1.2	Définition : mesure $\mu$ associée à une martingale . . . . .	214
8.1.3	Proposition : masse totale de $\mu$ . . . . .	214
8.1.4	Définition : espace $L^2(M)$ . . . . .	215
8.1.5	Exercice : mesure $\mu$ associée à un mouvement brownien arrêté . . . . .	215
8.1.6	Définition : intégrale stochastique d'un processus en escalier . . . . .	215
8.1.7	Proposition : l'intégrale stochastique conserve les martingales . . . . .	216
8.1.8	Lemme : condition de martingale . . . . .	216
8.2	Théorie $L^2$ de l'intégrale stochastique . . . . .	217
8.2.1	Théorème fondamental : isométrie de $\mathcal{S}$ dans $c\mathcal{M}^2b$ . . . . .	217
8.2.2	Proposition : densité de $\mathcal{S}$ dans $L^2(M)$ . . . . .	219
8.2.3	Proposition : construction de l'intégrale stochastique (IS) . . . . .	220
8.2.4	Exercice : linéarité et isométrie de l'IS . . . . .	221
8.2.5	Proposition : arrêt d'une intégrale stochastique . . . . .	221
8.2.6	Exercice : variance de l'IS . . . . .	221
8.3	Approximation de l'IS . . . . .	221
8.3.1	Théorème de convergence dominé . . . . .	221
8.3.2	Proposition : approximation de l'IS dans $L^2$ . . . . .	222
8.3.3	Exercice : calcul de $B \cdot B^T$ . . . . .	223
8.3.4	Exercice : intégrale de $H = Z]S, T]$ . . . . .	223
8.4	Covariation de l'IS . . . . .	224
8.4.1	Proposition : caractérisation de l'IS . . . . .	224
8.4.2	Proposition : covariation d'IS . . . . .	225
8.4.3	Proposition : associativité de l'IS . . . . .	226
8.5	Solution des exercices . . . . .	226

<b>9</b>	<b>Semi-martingales</b>	<b>231</b>
9.1	Martingale locale . . . . .	231
9.1.1	Définition : martingale locale . . . . .	231
9.1.2	Proposition : localisation d'une martingale locale continue . . .	231
9.1.3	Exercice : martingale locale continue à variation finie . . . . .	232
9.1.4	Exercice : martingale locale continue dominée . . . . .	232
9.1.5	Définition : variation quadratique d'une martingale locale continue . . . . .	232
9.1.6	Proposition : propriétés du processus $\langle M \rangle$ . . . . .	233
9.1.7	Définition : covariation de deux martingales locales continues .	234
9.2	Intégrale stochastique dans $c\mathcal{M}_{loc}$ . . . . .	235
9.2.1	Définition : espace $L^2(M)_{loc}$ . . . . .	235
9.2.2	Définition : processus localement borné . . . . .	235
9.2.3	Proposition : critère d'appartenance à $L^2(M)_{loc}$ . . . . .	235
9.2.4	Définition : intégrale stochastique relativement à une martingale locale . . . . .	236
9.2.5	Proposition : propriétés de l'intégrale stochastique . . . . .	237
9.2.6	Proposition : critère de martingale . . . . .	237
9.2.7	Exercice : critère de martingale et calcul de variance . . . . .	238
9.2.8	Exercice : intégrale de Wiener . . . . .	239
9.3	Approximation de l'IS dans $c\mathcal{M}_{loc}$ . . . . .	239
9.3.1	Théorème de convergence dominée relativement à une martingale locale . . . . .	239
9.3.2	Proposition : approximation de l'IS en probabilité . . . . .	240
9.4	Semi-martingale . . . . .	241
9.4.1	Définition : semi-martingale . . . . .	241
9.4.2	Proposition : covariation de deux semi-martingales . . . . .	242
9.4.3	Théorème de convergence dominé relativement à une semi-martingale . . . . .	242
9.5	Intégration par parties et formule d'Ito . . . . .	243
9.5.1	Proposition : formule d'intégration par parties . . . . .	243
9.5.2	Proposition : formule d'Ito . . . . .	244
9.5.3	Exercice : processus d'Ito . . . . .	248
9.5.4	Exercice : caractérisation de Lévy du mouvement brownien . .	248
9.6	Complément : approximation polynomiale . . . . .	249
9.7	Solution des exercices . . . . .	252
<b>10</b>	<b>Équations différentielles stochastiques</b>	<b>257</b>
10.1	Notations, hypothèses et définitions générales . . . . .	257
10.1.1	Définition : équation différentielle stochastique (EDS) . . . . .	258
10.1.2	Définition : solution d'une EDS . . . . .	258
10.1.3	Définition : solution d'une EDS dans un référentiel . . . . .	259
10.1.4	Définition : unicité en loi . . . . .	259
10.1.5	Définition : unicité en trajectoire . . . . .	260
10.1.6	Un théorème de Yamada et Watanabe . . . . .	260
10.2	Existence et unicité des solutions fortes . . . . .	261

10.2.1	Définition : application lipschitzienne . . . . .	261
10.2.2	Théorème d'Ito : existence et unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique . . . . .	261
10.2.3	Proposition : continuité en loi de la solution d'une EDS . . . . .	269
10.2.4	Proposition : expression fonctionnelle de la solution d'une EDS . . . . .	270
10.2.5	Lemme technique : expression fonctionnelle de l'IS . . . . .	271
10.2.6	Exercices : quelques équations et leurs processus solution . . . . .	273
10.3	Complément : continuité des solutions fortes . . . . .	274
10.4	Complément : théorème de continuité . . . . .	279
10.5	Solution des exercices . . . . .	283
<b>11</b>	<b>Construction des processus stochastiques</b>	<b>287</b>
11.1	Construction d'une probabilité . . . . .	287
11.1.1	Définition : semi-algèbre et algèbre . . . . .	287
11.1.2	Définition : fonction additive et sigma additive . . . . .	288
11.1.3	Théorème : extension de probabilité (Carathéodory) . . . . .	288
11.2	Processus canonique de lois finies données . . . . .	289
11.2.1	Définition : lois finies d'un processus stochastique . . . . .	290
11.2.2	Définition : système projectif de probabilités . . . . .	291
11.2.3	Proposition : lois finies et système projectif de probabilités . . . . .	291
11.2.4	Théorème de limite projective (Kolmogorov) . . . . .	291
11.2.5	Exemple : VAR indépendantes de même loi . . . . .	292
11.2.6	Exemple : processus gaussiens . . . . .	292
11.3	Complément : théorème de Carathéodory . . . . .	293
11.4	Complément : théorème de Kolmogorov . . . . .	295
<b>12</b>	<b>Processus de Markov</b>	<b>301</b>
12.1	Définition générale des processus de Markov . . . . .	301
12.1.1	Définition : processus de Markov . . . . .	301
12.1.2	Proposition : première généralisation de l'axiome (M) . . . . .	302
12.1.3	Proposition : seconde généralisation de l'axiome (M) . . . . .	302
12.1.4	Exercice : indépendance conditionnée du passé et du futur . . . . .	303
12.2	Processus de Markov homogène . . . . .	304
12.2.1	Définition : processus de Markov homogène . . . . .	305
12.2.2	Proposition : première généralisation de l'axiome (MH) . . . . .	306
12.2.3	Proposition : seconde généralisation de l'axiome (MH) . . . . .	306
12.2.4	Proposition : formule d'intégration successive . . . . .	306
12.2.5	Corollaire : probabilité des événements observables . . . . .	307
12.2.6	Proposition : réciproque de la formule d'intégration successive . . . . .	307
12.2.7	Exercice : probabilité des événements observables dans le cas discret . . . . .	308
12.2.8	Exercice : conditions de cohérence des lois conditionnées . . . . .	308
12.3	Semi-groupes de Markov . . . . .	308
12.3.1	Définition : semi-groupe de Markov . . . . .	308
12.3.2	Exercice : semi-groupe du processus de Poisson . . . . .	309
12.3.3	Exercice : semi-groupe du mouvement brownien . . . . .	309

12.4	Diffusion d'Ito . . . . .	310
12.4.1	Définition : diffusion d'Ito . . . . .	310
12.4.2	Proposition : diffusion et propriété de Markov . . . . .	310
12.5	Réalisation d'un semi-groupe . . . . .	312
12.5.1	Définition : réalisation d'un semi-groupe de Markov . . . . .	312
12.5.2	Proposition et définition : modèle markovien . . . . .	313
12.5.3	Proposition et définition : probabilité partant de $\mu$ . . . . .	314
12.5.4	Définition : opérateur de translation de temps . . . . .	315
12.5.5	Proposition : formule de translation de temps . . . . .	316
12.6	Réalisation canonique . . . . .	317
12.6.1	Hypothèses et notations spécifiques . . . . .	317
12.6.2	Théorème : réalisation canonique dans l'espace des trajectoires . . . . .	317
12.7	Complément : famille markovienne . . . . .	319
12.8	Complément : processus arrêté . . . . .	321
12.9	Solution des exercices . . . . .	323
<b>13</b>	<b>Processus de Feller</b> . . . . .	<b>327</b>
13.1	Semi-groupe de Feller . . . . .	327
13.1.1	Définition : semi-groupe d'opérateurs sur un espace de Banach . . . . .	330
13.1.2	Définition : semi-groupe de Feller . . . . .	330
13.1.3	Proposition : continuité forte d'un semi-groupe de Feller . . . . .	331
13.1.4	Proposition : semi-groupe de Feller associé à un SGCC positif . . . . .	331
13.1.5	Proposition : semi-groupe d'une diffusion . . . . .	335
13.2	Générateur et résolvante . . . . .	338
13.2.1	Proposition : équation de Kolmogorov . . . . .	339
13.2.2	Proposition : générateur dans un espace d'état fini . . . . .	340
13.2.3	Proposition : générateur d'une diffusion de Feller . . . . .	341
13.3	Processus de Feller . . . . .	343
13.3.1	Définition : Processus de Feller . . . . .	343
13.3.2	Proposition : propriété de Markov forte . . . . .	344
13.3.3	Proposition : complétion à droite de la filtration . . . . .	345
13.4	Complément : semi-groupe d'opérateurs . . . . .	346
13.5	Complément : continuité d'un semi-groupe de noyaux . . . . .	358
13.6	Complément : construction d'un processus de Feller . . . . .	361
<b>14</b>	<b>Chaîne de Markov</b> . . . . .	<b>369</b>
14.1	Définitions et propriétés générales . . . . .	369
14.1.1	Définition : produit de noyaux . . . . .	370
14.1.2	Proposition : semi-groupe à temps discret sur un espace dénombrable . . . . .	370
14.1.3	Définition : chaîne de Markov . . . . .	370
14.1.4	Exercice : propriété de Markov forte . . . . .	372
14.2	États récurrents et états transitoires . . . . .	372
14.2.1	Définition : graphe de Markov . . . . .	372
14.2.2	Définition : communication entre états . . . . .	372
14.2.3	Définition : chaîne irréductible . . . . .	372

14.2.4	Proposition : loi du nombre de passages . . . . .	373
14.2.5	Exercice : loi de $V_x$ . . . . .	373
14.2.6	Proposition et définition : état récurrent et transitoire . . . . .	373
14.2.7	Proposition : classe récurrente et transitoire . . . . .	374
14.2.8	Proposition : limite de $P^n(x, y)$ lorsque $y$ est transitoire . . . . .	374
14.2.9	Proposition : chaîne irréductible d'espace d'état fini . . . . .	374
14.2.10	Exercice : Casino . . . . .	375
14.3	Chaîne d'espace d'état fini . . . . .	375
14.3.1	Proposition : espérance d'absorption dans une classe récurrente . . . . .	376
14.3.2	Proposition : durée de séjour dans les classes transitoires . . . . .	377
14.3.3	Exercice : trois tireurs . . . . .	377
14.4	Mesure invariante . . . . .	378
14.4.1	Définition : mesure invariante . . . . .	378
14.4.2	Proposition : Existence d'une mesure invariante . . . . .	379
14.4.3	Proposition : Unicité de la mesure invariante . . . . .	380
14.5	Distribution invariante . . . . .	381
14.5.1	Définition : état positivement récurrent . . . . .	381
14.5.2	Proposition : existence d'une distribution invariante . . . . .	381
14.5.3	Exercice : chaîne binaire . . . . .	383
14.6	Distribution asymptotique . . . . .	383
14.6.1	Définition : état apériodique . . . . .	383
14.6.2	Proposition : chaîne irréductible apériodique . . . . .	383
14.6.3	Théorème : convergence des chaînes de Markov . . . . .	383
14.6.4	Exercice : plagiste et voiliers . . . . .	385
14.7	Complément : classes récurrentes ou transitoires . . . . .	385
14.8	Complément : unicité de la mesure invariante . . . . .	387
14.9	Complément : théorème de convergence . . . . .	389
14.10	Solution des exercices . . . . .	391
<b>15</b>	<b>Processus de sauts markoviens</b> . . . . .	<b>395</b>
15.1	Construction des processus de sauts markoviens . . . . .	395
15.1.1	Définition : processus de sauts stable . . . . .	396
15.1.2	Théorème : construction d'un processus de sauts markovien homogène . . . . .	396
15.1.3	Exercice : processus de naissance et stabilité . . . . .	398
15.1.4	Exercice : condition suffisante de stabilité . . . . .	398
15.1.5	Proposition : états absorbants de la chaîne et du processus . . . . .	399
15.2	Générateur et équation de Kolmogorov . . . . .	399
15.2.1	Définition : générateur d'un processus de sauts markovien . . . . .	400
15.2.2	Proposition : système d'équations différentielles de Kolmogorov . . . . .	400
15.2.3	Exercice : deux systèmes simples de Kolmogorov . . . . .	402
15.2.4	Définition : graphe de Markov d'un processus de sauts . . . . .	403
15.2.5	Exercice : modèle à exponentielles concurrentes . . . . .	403
15.3	Mesure annulatrice du générateur . . . . .	404
15.3.1	Définition : états récurrents et transitoires . . . . .	404

15.3.2	Définition : mesure annulatrice du générateur $Q$ ou invariante pour le semi-groupe $(P_t)$ . . . . .	404
15.3.3	Lemme $\lambda\gamma$ . . . . .	405
15.3.4	Proposition : existence de la mesure annulatrice du générateur . . . . .	405
15.3.5	Proposition : condition de stabilité . . . . .	406
15.4	Distribution annulatrice du générateur . . . . .	406
15.4.1	Définition : état positivement récurrent . . . . .	406
15.4.2	Lemme : masse totale de $\lambda_x$ . . . . .	407
15.4.3	Proposition : existence d'une distribution annulatrice du générateur . . . . .	407
15.4.4	Proposition : mesure annulatrice du générateur et mesure invariante . . . . .	408
15.4.5	Exercice : récurrence et transitoire . . . . .	411
15.5	Distribution asymptotique . . . . .	411
15.5.1	Théorème : convergence en loi . . . . .	411
15.5.2	Exercice : Processus de naissance et disparition . . . . .	412
15.6	Complément : construction des processus de sauts . . . . .	413
15.7	Complément : équations de Kolmogorov . . . . .	417
15.8	Complément : théorème de convergence en loi . . . . .	422
15.9	Solution des exercices . . . . .	423
<b>16</b>	<b>Processus de Lévy</b> . . . . .	<b>427</b>
16.1	Accroissements indépendants stationnaires . . . . .	427
16.1.1	Définitions : processus à accroissements indépendants stationnaires (PAIS) . . . . .	427
16.1.2	Proposition : stationnarité . . . . .	427
16.1.3	Lemme : stationnarité de $\mathcal{F}_{s,t}^X$ . . . . .	428
16.1.4	Définition : processus de Markov homogène dans le temps et l'espace . . . . .	429
16.1.5	Proposition : processus de Markov et PAIS . . . . .	429
16.2	Processus de Lévy : propriétés générales . . . . .	432
16.2.1	Définition : processus de Lévy . . . . .	432
16.2.2	Proposition : fonction caractéristique . . . . .	432
16.2.3	Proposition : propriété de Feller . . . . .	433
16.2.4	Proposition : propriété de Markov forte . . . . .	434
16.2.5	Théorème des moments . . . . .	436
16.2.6	Exercice : espérance et variance d'un processus de Lévy . . . . .	436
16.3	Processus de Poisson . . . . .	437
16.3.1	Définition : processus de comptage . . . . .	437
16.3.2	Proposition et définition : processus de Poisson . . . . .	437
16.3.3	Théorème d'indépendance . . . . .	438
16.3.4	Définition : processus de Poisson composé . . . . .	441
16.3.5	Proposition : fonction caractéristique d'un PPC . . . . .	441
16.3.6	Exercice espérance et variance d'un PPC . . . . .	442
16.4	Processus associés aux sauts d'un processus de Lévy . . . . .	443
16.4.1	Définition : processus de sauts d'un processus <i>cadlag</i> . . . . .	443

16.4.2	Définition : nombre de sauts d'un processus <i>cadlag</i> . . . . .	443
16.4.3	Proposition : le processus $N(A)$ est un processus de Poisson . .	444
16.4.4	Proposition : processus des sauts cumulés . . . . .	446
16.4.5	Proposition : indépendance des processus de sauts cumulés . .	448
16.5	Décomposition d'un processus de Lévy . . . . .	449
16.5.1	Théorème de décomposition d'un processus de Lévy . . . . .	449
16.5.2	Proposition : formule de Lévy-Kintchine . . . . .	451
16.6	Solution des exercices . . . . .	453
<b>17</b>	<b>Modélisation</b> . . . . .	<b>455</b>
17.1	Files d'attente . . . . .	455
17.1.1	Définition : file d'attente . . . . .	455
17.1.2	Proposition : file d'attente $M(\lambda) / M(\mu) / 1 / \infty$ loi du nombre de personnes . . . . .	456
17.1.3	Proposition : file d'attente $M(\lambda) / M(\mu) / 1 / \infty$ loi du temps d'attente . . . . .	458
17.1.4	Exercice : étude du modèle $M(\lambda) / M(\mu) / 2 / \infty$ . . . . .	459
17.1.5	Exercice : salon de coiffure . . . . .	460
17.2	Fiabilité et disponibilité des systèmes . . . . .	460
17.2.1	Définitions : disponibilité et fiabilité . . . . .	460
17.2.2	Proposition : expression générale du MTTF . . . . .	461
17.2.3	Étude d'un composant . . . . .	461
17.2.4	Système série et parallèle . . . . .	462
17.2.5	Exercice : système non réparable . . . . .	462
17.2.6	Exercice : station de pompage . . . . .	463
17.2.7	Exercice : système parallèle, calcul de la fiabilité . . . . .	463
17.2.8	Proposition : majoration de la défiabilité . . . . .	464
17.2.9	Exercice : redondances passives à trois composants . . . . .	465
17.3	Solution des exercices . . . . .	466