Chapitre 1

Mesurabilité et intégration

Introduction : définition générale des processus stochastiques

Étant donné :

1. $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P})$ un *espace de probabilité.*
2. $(E,\, \mathcal{B})$ un *espace mesurable* appelé *espace d'états* :
   - $E = \{0, 1, \dots n\},\ \mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}^d,\ \mathbb{C} \dots$
   - $\mathcal{B}$ tribu borélienne de E.
3. T un ensemble de temps : $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}^+$.

On appelle *processus stochastique* (ou fonction aléatoire) une application X de $T \times \Omega$ dans E, telle que pour tout $t \in T$, l'application $\omega \mapsto X(t, \omega) = X_t(\omega)$ est une *variable aléatoire*, c'est-à-dire est *mesurable* de $(\Omega,\, \mathcal{F})$ dans $(E,\, \mathcal{B})$.

On se propose dans ce chapitre de rappeler les notions d'espace de probabilité, d'applications mesurables et d'introduire leurs intégrales.

1.1 Espace de probabilité

1.1.1 Définition : espace de probabilité

Un *espace de probabilité* est un triplet $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P})$ où :
- Ω est un ensemble non vide,
- $\mathcal{F}$ est une tribu de parties de Ω,
- $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $\mathcal{F}$.

Dans une expérience aléatoire, l'ensemble Ω est l'ensemble des résultats ou *réalisations* possibles de cette expérience.

Exemple : dans une suite de n parties de pile ou face, l'ensemble Ω est l'ensemble de toutes les suites possibles de résultats des n parties.

Si on code pile par 0 (perdue) et face par 1 (gagnée) une réalisation ω est un n-uplet sur $\{0,\ 1\}$ soit $\omega = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_i = 0$ ou 1, donc $\Omega = \{0, 1\}^n$.

Un *événement* est un ensemble de réalisations, donc un sous-ensemble de Ω.

Exemple : soit X_i le résultat de la i-ième partie de pile ou face, pour
$\omega = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ on a $X_i(\omega) = x_i$ les sous-ensembles A et B de Ω définis par :
– $A = \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) = 0 \text{ et } X_2(\omega) = 0\}$
– $B = \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) = 1 \text{ ou } X_2(\omega) = 1\}$
qui signifient respectivement : « les deux premières parties sont perdues » et « l'une des deux premières parties est gagnée » sont des événements.
Remarquons que B est l'événement complémentaire de A dans Ω.
Une *tribu* $\mathcal{F}$ sur Ω est un ensemble *d'événements* pouvant se produire au cours d'une expérience aléatoire.

Une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω est donc un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}_\Omega$ de tous les sous-ensembles de Ω (appelé aussi *ensemble des parties* de Ω).

1.1.2 Définition : tribu

Un ensemble $\mathcal{F}$ de parties d'un ensemble non vide Ω est une *tribu* sur Ω si :

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
3. $\forall n,\ A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$ (union dénombrable).

Remarquons que (1) et (2) impliquent $\Omega \in \mathcal{F}$ et que (2) et (3) impliquent :

$$\forall n,\ A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$$

Une tribu $\mathcal{F}$ est un ensemble d'événements pouvant être défini à l'aide des réalisations d'une expérience aléatoire. Elle doit :

1. Contenir l'ensemble vide : c'est l'événement qui n'arrive jamais.
2. Contenir l'ensemble Ω lui-même : c'est l'événement qui arrive toujours.
3. Être stable par les opérations ensemblistes :
   (a) Le complémentaire d'un événement A est l'événement A^c qui est réalisé lorsque A ne l'est pas.
   (b) L'union de deux événements A et B est l'événement $A \bigcup B$ qui est réalisé lorsque l'un ou l'autre des événements est réalisé (ou les deux).
   (c) L'intersection de deux événements A et B est l'événement $A \bigcap B$ qui est réalisé lorsque les deux événements sont réalisés.

Si Ω est un ensemble quelconque de réalisations, $\mathcal{F} = \{\emptyset,\, \Omega\}$ est la plus petite tribu sur Ω, la plus grande est l'ensemble $\mathcal{P}_\Omega$ des sous ensembles de Ω.

Dans une expérience aléatoire il est souvent utile de définir des *sous-tribus* de la tribu $\mathcal{F}$ de tous les événements possibles pour caractériser des classes particulières d'événements.

Exemple : soit $\Omega = \{0,\, 1\}^n$ l'ensemble des réalisations d'une suite de n parties de pile ou face, et $\mathcal{F} = \mathcal{P}_\Omega$ la tribu de tous les événements possibles.
Notons $\mathcal{F}_k$ la tribu des événements que l'on peut définir *uniquement* à l'aide des résultats des k premières parties.
Si X_i est le résultat de la i-ième parties, notons $[X_i = x]$ l'ensemble des suites de parties où la i-ème partie est perdue ou gagnée selon que $x = 0$ ou $x = 1$, on a :

$$[X_i = x] = \{\omega \in \Omega \,|\, X_i(\omega) = x\}$$

De même $[X_i = x_i\,,\, X_j = x_j] = \{\omega \in \Omega \,|\, X_i(\omega) = x_i \text{ et } X_j(\omega) = x_j\}$.

Avec ces notations :
– $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset,\ \Omega,\ [X_1 = 0],\ [X_1 = 1]\}$;
– $\mathcal{F}_2$ est constituée du vide $\emptyset$ et des unions d'événements « atomiques » :

$$[X_1 = 0,\ X_2 = 0],\ [X_1 = 0,\ X_2 = 1],\ [X_1 = 1,\ X_2 = 0],\ [X_1 = 1,\ X_2 = 1]$$

Ainsi on a $[X_1 = 0] = [X_1 = 0,\ X_2 = 0] \bigcup [X_1 = 0,\ X_2 = 1]$.

Les tribus $\mathcal{F}_k$ qui forment une suite *croissante* de sous-tribus de $\mathcal{F}$ constituent une *filtration* sur $(\Omega,\, \mathcal{F})$.

1.1.3 Proposition : toute intersection de tribus est une tribu

Démonstration
Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur Ω, montrons que $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est une tribu.

1. $\forall i,\ \emptyset \in \mathcal{F}_i \implies \emptyset \in \bigcap\limits_i \mathcal{F}_i$
2. $A \in \bigcap\limits_i \mathcal{F}_i \implies \forall i,\ A \in \mathcal{F}_i \implies \forall i,\ A^c \in \mathcal{F}_i \implies A^c \in \bigcap\limits_i \mathcal{F}_i$
3. $\forall n,\, A_n \in \bigcap\limits_i \mathcal{F}_i \implies \forall n,\, \forall i,\, A_n \in \mathcal{F}_i \implies \forall i,\, \bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{F}_i \implies \bigcup\limits_n A_n \in \bigcap\limits_i \mathcal{F}_i$

1.1.4 Définition : tribu engendrée

1. Si Γ est un ensemble de sous-ensembles de Ω, on appelle *tribu engendrée* par Γ et on note $\sigma(\Gamma)$ la plus petite tribu (au sens de l'inclusion des ensembles) sur Ω contenant Γ.

2. Si E est un espace topologique, on appelle *tribu borélienne* ou *tribu de Borel* de E et on note $\mathcal{B}(E)$ la tribu sur E engendrée par les ouverts.
   La tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ est aussi engendrée par les intervalles.

Remarque : puisque toute intersection de tribus est une tribu, il existe toujours une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant Γ : c'est l'intersection de toutes les tribus sur Ω qui contiennent Γ.

Exemple : soit A un sous ensemble de Ω, la tribu $\mathcal{F} = \sigma(A)$ engendrée par A est :

$$\mathcal{F} = \{\emptyset,\ A,\ A^c,\ \Omega\}$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ est une partition finie de Ω, la tribu

$$\mathcal{F} = \sigma(A_i \,|\, i = 1, \dots, n)$$

engendrée par cette partition est appelée *tribu atomique*. Elle est constituée de $\emptyset$ et des unions finies d'ensembles A_i.

1.1.5 Définition : probabilité

Une *probabilité* sur une tribu $\mathcal{F}$ est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}$ dans $[0,\,1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall A_n \in \mathcal{F},\ \forall i \neq j \in \mathbb{N},\ A_i \cap A_j = \emptyset \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\cup_n A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$.

La probabilité d'une union dénombrable d'événements *disjoints* est la somme de leurs probabilités.
Remarque : plus généralement une *mesure positive* sur une tribu $\mathcal{F}$ est une application μ de $\mathcal{F}$ dans $[0,\,\infty]$ vérifiant (1) et (3).
Une mesure μ est dite σ-finie, s'il existe une partition (A_n) de Ω telle que :

$$\forall \mathrm{n},\ \mathrm{A}_n \in \mathcal{F} \text{ et } \mu(\mathrm{A}_n) < +\infty$$

1.1.6 Proposition : règles du calcul des probabilités

1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. $\mathbb{P}(A \bigcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \bigcap B)$
3. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}\left(A_i \bigcap A_j\right) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}\left(A_i \bigcap A_j \bigcap A_k\right)$
   $+ \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$ (Formule de Poincaré)

Démonstration

1. L'axiome (3) implique en particulier :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \text{ lorsque } A \cap B = \emptyset \quad (3')$$

En prenant $B = A^c$ dans (3'), on obtient $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

2. On a $A = (A - B) \bigcup (A \cap B)$ où $A - B$ et $A \cap B$ sont disjoints donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B) \text{ et } \mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

De même $A \cup B = (A - B) \bigcup B$ où $A - B$ et B sont disjoints, donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

3. Par récurrence.

1.1.7 Définition : événements indépendants

On dit que les événements d'une famille finie $(A_i)_{i=1,n}$ sont *indépendants* si :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

On dit qu'une famille quelconque d'événements est indépendante si toute sous famille finie est constituée d'événements indépendants.

Exemple : pour une suite de n parties de pile ou face, à pièce non truquée, c'est à dire $\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ et en supposant les parties indépendantes, si $\omega = (x_1, \ldots, x_n)$, on a :

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) = \frac{1}{2^n}$$

Pour $A \in \mathcal{F}$, on a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathrm{Card}(A)\,\frac{1}{2^n} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

On retrouve sur cet exemple un résultat classique : si les réalisations en nombre fini d'une expérience aléatoire sont *équiprobables*, la probabilité d'un événement est égale au nombre de cas (ou réalisations) « favorables » sur le nombre de cas possibles.

1.1.8 Définition : probabilité conditionnée

Si B est un *événement non négligeable*, c'est-à-dire $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on appelle *probabilité conditionnée* par B, et on note $\mathbb{P}(. \,|\, B)$ la probabilité sur $\mathcal{F}$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(A \bigcap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

1.1.9 Exercice : bal masqué

Soit n couples mariés, masqués et costumés, dans une salle de bal.

1. Quelle est la probabilité de l'événement $A =$ « chaque danseur danse avec sa femme » ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement $B =$ « aucun danseur ne danse avec sa femme » ?
   On notera A_i l'événement « le danseur i danse avec sa femme ».
3. Montrer que la probabilité de B tend vers e^{-1} lorsque $n \to +\infty$.

1.1.10 Exercice : lemme de Borel-Cantelli

Rappelons que si (A_n) est une suite d'événements, on pose :

$$\limsup_n A_n = \bigcap_N \bigcup_{n \geq N} A_n \text{ et } \liminf_n A_n = \bigcup_N \bigcap_{n \geq N} A_n$$

$\limsup_n A_n$ est l'ensemble des ω tels que $\omega \in A_n$ pour une infinité d'entiers n.
$\liminf_n A_n$ est l'ensemble des ω tels que $\omega \in A_n$ sauf pour un nombre fini d'entiers n.

Montrer que :

1. Pour toutes suites d'événements (A_n), on a :
$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Longrightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$$
2. Pour toutes suites d'événements *indépendants* (A_n), on a :
$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty \Longrightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$$

1.2 Applications mesurables

1.2.1 Définition : applications mesurables

1. Un *espace mesurable* est un couple $(E, \mathcal{B})$ constitué d'un ensemble E non vide, et d'une tribu $\mathcal{B}$ sur E.
2. Une application X d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ dans un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$ est *mesurable* si $X^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{F}$, ou encore :
$$\forall B \in \mathcal{B},\ X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} = [X \in \mathcal{B}] \in \mathcal{F}$$
3. Dans le cas particulier ou $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, on dit que X est $\mathcal{F}$-mesurable pour exprimer que X est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. On note m$\mathcal{F}$ l'ensemble des applications $\mathcal{F}$-mesurables. On montre que m$\mathcal{F}$ est une *algèbre*.

Exemple : fonction étagée
On appelle *fonction étagée* sur Ω une combinaison linéaire finie d'indicatrices de sous ensemble A_i de Ω.
Une application X étagée sur Ω est donc de la forme :

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; 1_{A_i}(\omega)$$

où x_i est un réel et $1_{A_i}(\omega)$ vaut 1 si $\omega \in A_i$ et 0 sinon.
Si pour tout i l'ensemble A_i appartient à une tribu $\mathcal{F}$ de Ω alors on dit que X est *étagée* sur $\mathcal{F}$.

1.2.2 Proposition : fonction étagée et mesurabilité

Si X est étagée sur $\mathcal{F}$ alors X est $\mathcal{F}$-mesurable. Réciproquement, si X est $\mathcal{F}$-mesurable et si $\mathcal{F}$ est *atomique* alors X est étagée sur $\mathcal{F}$.

Démonstration
Si $\forall i,\ A_i \in \mathcal{F}$, alors pour tout borélien $B \in \mathcal{B}$:

$$X^{-1}(B) = \bigcup_i \{A_i \mid x_i \in B\} \in \mathcal{F} \text{ (car l'union est finie)}$$

X est donc $\mathcal{F}$-mesurable.

Réciproquement, montrons que si $\mathcal{F} = \sigma(A_i \,|\, i = 1, \ldots, n)$ et si X est $\mathcal{F}$-mesurable, alors pour tout i, X est constante sur A_i.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $\omega_1,\ \omega_2 \in A_i$ tels que :

$$X(\omega_1) = x_1 \text{ et } X(\omega_2) = x_2 \text{ avec } x_1 \neq x_2$$

Posons $X^{-1}(x_1) = A$, on a $A \in \mathcal{F}$, donc A est de la forme $A = \bigcup_{j \in J} A_j$.
On a $X(\omega_1) = x_1$, donc $\omega_1 \in A$, or $\omega_1 \in A_i$ donc $i \in J$.
Mais on a aussi $X(\omega_2) = x_2$, donc $\omega_2 \notin A$, or $\omega_2 \in A_i$ donc $i \notin J$!

1.2.3 Proposition : critère de mesurabilité de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{B})$

Soit X une application de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans (E, $\mathcal{B}$) et $\Gamma \subseteq \mathcal{B}$, telle que $\sigma(\Gamma) = \mathcal{B}$.
X est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{B})$ si et seulement si :

$$X^{-1}(\Gamma) \subseteq \mathcal{F}$$

Démonstration
Il faut montrer que $X^{-1}(\Gamma) \subseteq \mathcal{F} \Longrightarrow X^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{F}$.

Posons $\Gamma' = \{A \in \mathcal{B} \mid X^{-1}(A) \in \sigma[X^{-1}(\Gamma)]\}$, on a $\Gamma' \subseteq \mathcal{B}$
On va montrer d'abord (1) que $X^{-1}(\Gamma') \subseteq \mathcal{F}$, puis (2) que $\Gamma' = \mathcal{B}$.

1. $X^{-1}(\Gamma) \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \sigma[X^{-1}(\Gamma)] \subseteq \mathcal{F}$ (puisque $\mathcal{F}$ est une tribu).
   Il en résulte :
   $$\begin{aligned} A \in \Gamma' &\Rightarrow X^{-1}(A) \in \sigma[X^{-1}(\Gamma)] \\ &\Rightarrow X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \end{aligned}$$
   donc $X^{-1}(\Gamma') \subseteq \mathcal{F}$.
2. On a :
   $$\begin{aligned} A \in \Gamma &\Rightarrow X^{-1}(A) \in X^{-1}(\Gamma) \\ &\Rightarrow X^{-1}(A) \in \sigma[X^{-1}(\Gamma)] \\ &\Rightarrow A \in \Gamma' \end{aligned}$$
   donc $\Gamma \subseteq \Gamma'$.

   Or Γ' est une tribu, donc $\Gamma \subseteq \Gamma' \Rightarrow \sigma(\Gamma) \subseteq \Gamma'$
   Par hypothèse $\sigma(\Gamma) = \mathcal{B}$, donc $\sigma(\Gamma) \subseteq \Gamma' \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \Gamma' = \mathcal{B}$
3. Vérifions que Γ' est une tribu :
   (a) $\emptyset \in \Gamma'$ car $\emptyset \in \sigma[X^{-1}(\Gamma)]$.
   (b) $A \in \Gamma' \Rightarrow A^c \in \Gamma'$ puisque :
   $$X^{-1}(A) \in \sigma[X^{-1}(\Gamma)] \Longrightarrow X^{-1}(A^c) = (X^{-1}(A))^c \in \sigma[X^{-1}(\Gamma)]$$
   (c) $A_n \in \Gamma' \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \Gamma'$ puisque :
   $$\forall n,\ X^{-1}(A_n) \in \sigma[X^{-1}(\Gamma)] \Longrightarrow X^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcup_n X^{-1}(A_n) \in \sigma[X^{-1}(\Gamma)]$$

1.2.4 Proposition : critère de mesurabilité de $(\Omega,\ \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$

Si X est une application de $(\Omega,\ \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$, X est $\mathcal{F}$-mesurable si et seulement si :
$$\forall a \in \mathbb{R},\ X^{-1}(]-\infty,\ a]) = [X \leq a] \in \mathcal{F}$$

Démonstration

La condition est évidemment nécessaire puisque $]-\infty,\ a]$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
Inversement, pour montrer qu'une application X est mesurable de $(\Omega,\ \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, c'est-à-dire pour montrer que $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{F}$, il suffit (proposition 1.2.3) de montrer que :
$$X^{-1}(\Gamma) \subseteq \mathcal{F}$$
pour une partie génératrice Γ de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Or, les intervalles $]-\infty,\ a]$ engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. La condition
$$\forall\ a \in \mathbb{R}, X^{-1}(]-\infty,\ a]) \in \mathcal{F}$$
est donc bien une condition suffisante pour que X soit $\mathcal{F}$-mesurable.