

Chapitre I

CONCEPTS ET DÉFINITIONS

1. Milieu continu et système – Mouvement d'un fluide

1.1. Particule de fluide

Comme tout milieu matériel, les fluides sont constitués d'atomes et de molécules et, de ce fait, ils comportent à l'échelle moléculaire une proportion très importante de vide. Cependant, pour les applications industrielles dans lesquelles ils interviennent, on considère un **fluide** comme un **milieu matériel continu déformable**. De plus, dans la suite de cet ouvrage, on fait l'hypothèse que ce milieu est localement **homogène** et **isotrope**. La plus petite échelle à laquelle on le considère est celle de la **particule de fluide** qui, par convention, est suffisamment grande pour contenir un très grand nombre de molécules qui n'apparaissent plus comme des entités différentes, mais comme un tout. À l'opposé, elle est suffisamment petite pour que l'on puisse y considérer tous ses paramètres comme ayant la même valeur à un instant donné.

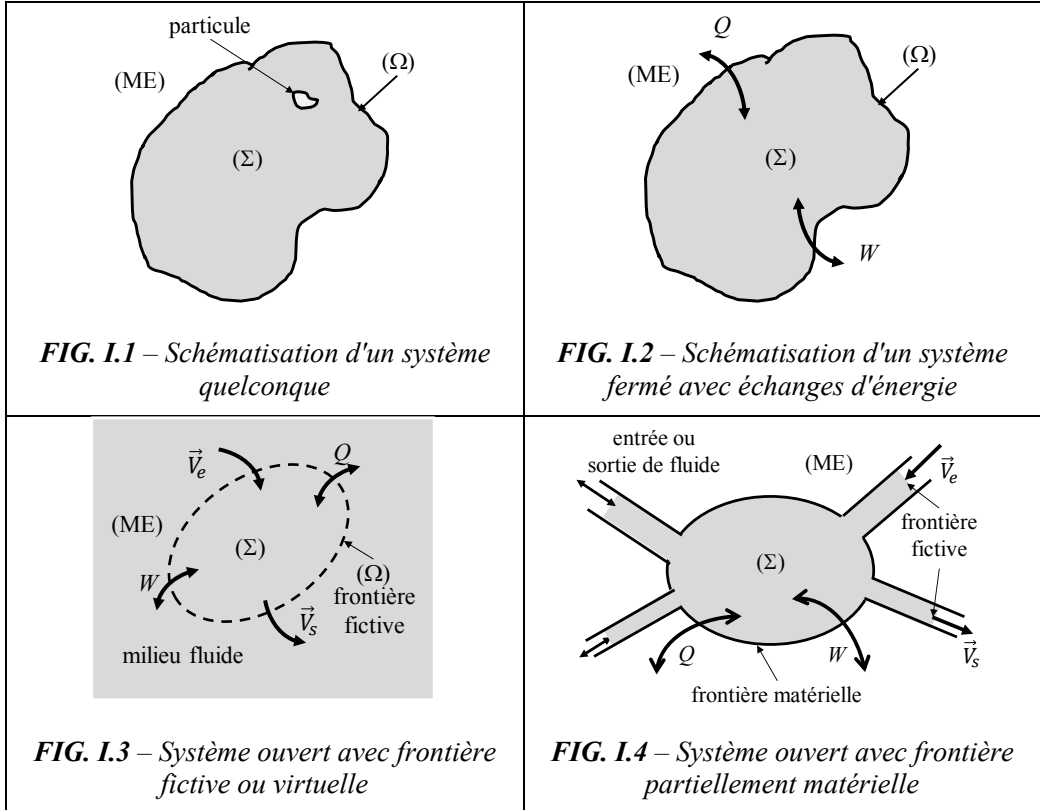
1.2. Systèmes fermés – Systèmes ouverts - Conventions

Toute résolution de problème nécessite d'abord de définir l'ensemble considéré, le **système** (Σ), délimité de son **milieu extérieur** (ME) par une surface **frontière** (Ω) qui peut être matérielle ou fictive. Dans le cas des fluides ce système est constitué de particules (Fig. I.1). Le **système** est **fermé** si le fluide reste à l'intérieur de la frontière, qui peut être déformable. Cependant, il peut y avoir des **échanges d'énergie** entre le système et son milieu extérieur. Sauf cas particulier, on ne considère ici que des échanges d'énergies thermique Q et/ou mécanique W (Fig. I.2). Par **convention** ces **flux énergétiques** sont considérés comme **positifs**, s'ils entrent dans le système ; ils sont **négatifs** s'ils en sortent. S'il n'y a aucun échange, le **système** est dit **isolé**.

Lorsque le fluide est en **mouvement**, deux conceptions d'étude sont possibles :

- soit l'ensemble du système se déplace, avec une déformation éventuelle de la frontière, le **système** est **fermé** avec ou sans échanges d'énergie. La schématisation est analogue à celle de la figure I.2 ;
- soit la frontière reste fixe, **rigide ou déformable**. C'est alors le fluide qui s'écoule à travers cette frontière avec des vitesses quelconques, différentes entre l'entrée \vec{V}_e et

la sortie \vec{V}_s . Le **système** est dit **ouvert**. La totalité de la frontière peut être virtuelle (Fig. I.3) ou partiellement virtuelle et partiellement matérielle, le fluide ne pouvant s'écouler qu'au travers des parties virtuelles de la frontière (Fig. I.4). Dans chacun des deux cas, il peut y avoir transfert d'énergie à travers la frontière.



1.2.1. Système fermé – Variables de Lagrange

Comme en mécanique rationnelle, en système fermé, on considère l'évolution individuelle des particules du système dans leur déplacement au cours du temps t . Les différents **paramètre** p_i qui caractérisent le fluide sont attachés au positionnement x_i de la particule à l'instant t , qui lui-même dépend de sa position initiale x_{i0} au temps t_0 . On a :

$$x_i = f(x_{i0}, t_0, t) \quad (I.1)$$

Ces variables x_{i0}, t_0, t sont dites **variables de Lagrange**. Pour une particule donnée, x_{i0}, t_0 sont des constantes. Ainsi, les composantes V_i de la vitesse \vec{V} et γ_i de l'accélération $\vec{\gamma}$ de la particule choisie sont données par :

$$V_i = \frac{dx_i}{dt} \text{ et } \gamma_i = \frac{dV_i}{dt} = \frac{d^2x_i}{dt^2} \quad (I.2)$$

1.2.2. Système ouvert – Variable d'Euler

La possibilité d'étude précédente n'est que peu utilisée dans les analyses du comportement des fluides. En effet, le fluide étant un milieu continu, il importe moins de pouvoir suivre

une **particule** "marquée" dans son déplacement que de connaître l'évolution générale du milieu, en particulier d'avoir, par exemple, à un instant donné un cliché de la masse volumique ρ , de la température T , des vecteurs vitesse et accélération en tous les points contenus à l'intérieur d'une surface fermée Ω fixe. Les variables **indépendantes** choisies sont alors le temps t et les coordonnées d'un **point géométrique quelconque** x_1, x_2, x_3 interne à la surface Ω . Les composantes du vecteur vitesse sont alors données par :

$$V_i = V_i(x_j, t) \tag{1.3}$$

Plus généralement, pour tout vecteur \vec{G} quelconque défini dans l'espace du fluide, on a :

$$\vec{G} = \vec{G}(x_j, t) \quad \text{ou pour ses composantes :} \quad G_i = G_i(x_j, t) \tag{1.4}$$

et pour tout scalaire G quelconque :

$$G = G(x_i, t) \tag{1.5}$$

La connaissance de ces fonctions, à t donné, permet d'atteindre le champ des vecteurs vitesses, des vecteurs \vec{G} quelconques ou des scalaires G dans le domaine choisi à l'instant t . L'ensemble des paramètres x_i et t constitue les **variables d'Euler**. Ces variables et les fonctions qui s'y rattachent permettent d'étudier la vitesse, la masse volumique, la température, la pression, les contraintes, etc., d'un fluide en écoulement, en tout **point géométrique** d'un espace **fixe**, en fonction du temps.

a) Lignes de courant et tube de courant

À un instant t , l'ensemble des vecteurs vitesses constitue le **champ des vitesses à l'instant t** . On appelle **ligne de courant** une courbe tangente, à cet instant et en chacun de ses points, aux vecteurs vitesses (Fig. I.5).

Toutes les lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé (C) quelconque forment un **tube de courant** (une canalisation est un cas particulier de tube de courant). La surface continue située à l'intérieur d'un tube de courant et perpendiculaire en tous ses points aux lignes de courant contenues dans le tube est une **section droite**. Si le tube est de section infiniment petite, on a un **filet de courant**. La vitesse et tous les autres paramètres du fluide sont alors, par convention, les mêmes en tous les points d'une section droite.

Lorsque l'écoulement est **permanent** (tous les paramètres sont indépendants du temps), les lignes de courant se confondent avec les **trajectoires des particules**.

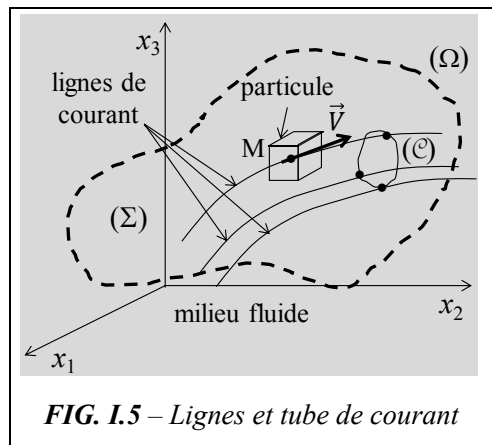


FIG. I.5 – Lignes et tube de courant

b) Dérivée particulaire

Lorsqu'une grandeur est attachée à une particule, comme la vitesse par exemple, l'opération de dérivation dans le temps doit correspondre à une dérivée totale par rapport au temps. Ainsi, l'accélération $\vec{\gamma}$ du fluide en un point correspond à la **dérivée particulaire** (attachée à la particule) de la vitesse :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (\text{I.6})$$

Dans cette relation, les x_i sont attachés à une particule. Ainsi, les quantités dx_i/dt sont les coordonnées V_i du vecteur vitesse de la particule considérée. On peut alors écrire :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = V_i \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \gamma_j = \frac{dV_j}{dt} = V_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_j}{\partial t} \quad (\text{I.7})$$

Le résultat précédent peut être généralisé à toutes les grandeurs scalaire G ou vectorielle \vec{G} attachées aux particules. Les dérivées par rapport au temps de ces grandeurs seront respectivement :

$$\frac{dG}{dt} = V_i \frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{G}}{dt} = V_i \frac{\partial \vec{G}}{\partial x_i} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \frac{dG_j}{dt} = V_i \frac{\partial G_j}{\partial x_i} + \frac{\partial G_j}{\partial t} \quad (\text{I.8})$$

Pour une grandeur scalaire ou pour les composantes d'une grandeur vectorielle, ou encore sous forme vectorielle, on peut aussi écrire :

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} G \quad \text{et} \quad \frac{dG_j}{dt} = \frac{\partial G_j}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} G_j \quad \text{ou} \quad \frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}} \vec{G} \quad (\text{I.9})$$

avec :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \vec{G} = \left\| \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \right\| \quad (\text{I.10})$$

Dans un écoulement en **régime permanent**, si les caractéristiques du fluide sont généralement différentes d'un point à un autre, elles restent identiques en tout point au cours du temps. Pour toute grandeur G ou G_i , cela se traduit par :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial G_i}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.11})$$

1.3. Mouvement d'un élément de volume de fluide – Vitesse de déformation

Au cours de son mouvement, un solide subit en général un changement de position et d'orientation. Un élément de volume de **fluide** subit en plus un **changement de forme**.

Soit à l'instant t un élément de volume quelconque entourant le point $M(x_i)$ - variables d'Euler - et le point $M'(x'_i)$ voisin de M (Fig. I.6). Dans le cas d'un système indéformable, la vitesse de M' est donnée en fonction de la vitesse en M et du vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}$ par la relation :

$$\vec{V}_{M'} = \vec{V}_M + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{\omega}$$

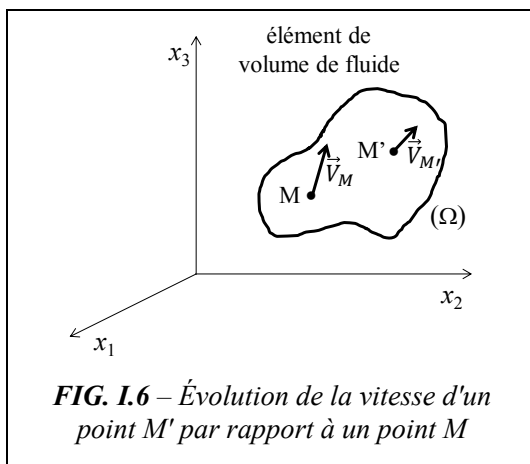


FIG. I.6 – Évolution de la vitesse d'un point M' par rapport à un point M

Si on note par l_1, l_2, l_3 les composantes du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, on peut également écrire :

$$\overrightarrow{V'} = \overrightarrow{V} + l_i \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial x_i} \quad (\text{I.12})$$

ou en équations scalaires :

$$V'_i = V_i + l_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (\text{I.13})$$

La première de ces équations scalaires peut encore s'écrire :

$$V'_1 = V_1 + \frac{1}{2} \left[l_3 \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) - l_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \right] \\ + l_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} l_2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} l_3 \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \quad (\text{I.14})$$

Les deux autres équations scalaires s'obtiennent facilement par permutation circulaire. On pose :

$$T_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right) \quad \text{et} \quad \theta_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right) \quad (\text{I.15})$$

Ainsi :

$$V'_i = V_i + (T_j l_k - T_k l_j) + l_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + (\theta_k l_j + \theta_j l_k) \quad (\text{I.16})$$

Dans cette équation, on remarque que le deuxième terme représente la rotation de la particule avec une vitesse instantanée de rotation \overrightarrow{T} appelée **vecteur tourbillon** qui est égal à la moitié du rotationnel de la vitesse \overrightarrow{V} :

$$\overrightarrow{T} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V} = T_i \overrightarrow{e}_i \quad (\text{I.17})$$

où \overrightarrow{e}_i est le vecteur unitaire de la direction \overrightarrow{x}_i . Ainsi, la vitesse du point M' ($\overrightarrow{V'}$) par rapport à celle du point M (\overrightarrow{V}) peut être considérée comme le résultat :

a) d'une vitesse $\overrightarrow{V}(V_1, V_2, V_3)$ qui correspond à une **translation en bloc** de l'élément de volume considéré ;

b) d'une vitesse \overrightarrow{Ro} dont les composantes sont :

$$Ro_i = T_j l_k - T_k l_j \quad (\text{I.18})$$

et qui n'est autre que le produit vectoriel de \overrightarrow{T} par $\overrightarrow{MM'}$

$$\overrightarrow{Ro} = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{MM'} \quad (\text{I.19})$$

\overrightarrow{Ro} correspond à une vitesse due à la rotation du point M' autour du point M à la vitesse angulaire \overrightarrow{T} ;

c) d'une vitesse \overrightarrow{D} dont les composantes sont :

$$D_i = l_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \theta_k l_j + \theta_j l_k \quad (\text{I.20})$$

Pour analyser les composantes de ce vecteur, on considère par exemple le scalaire :

$$\theta_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \tag{I.21}$$

Soit dans le plan (\vec{x}_i, \vec{x}_j) l'élément MNM'N' (Fig. I.7). Décomposons le mouvement général de cet élément selon les deux directions \vec{x}_i et \vec{x}_j . Selon \vec{x}_i , à cause de la variation de V_i en fonction de x_j , le carré initial se transforme en losange. La déformation étant souvent petite, l'angle $d\alpha_i$ est lié au gradient de vitesse comme suit :

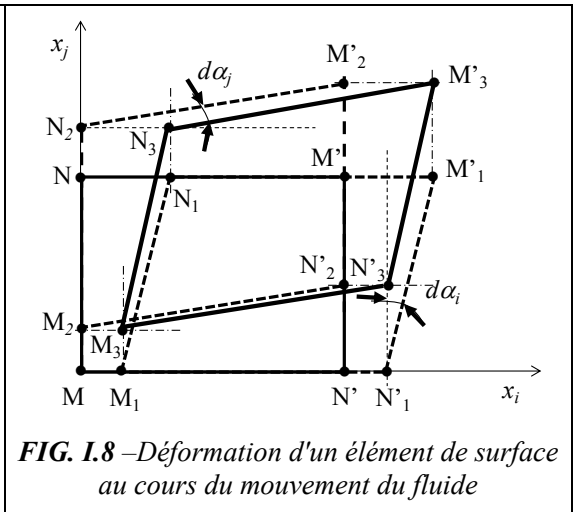
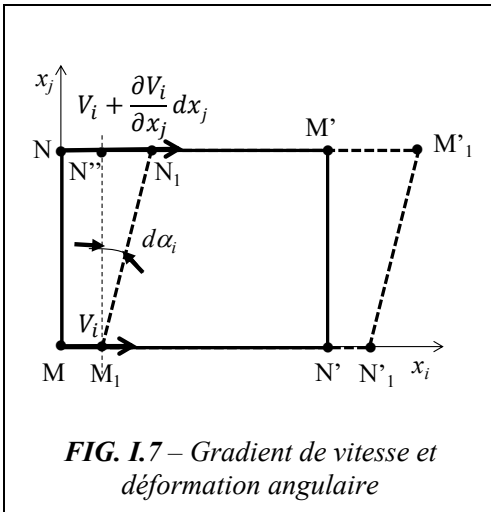
$$d\alpha_i \approx \tan(d\alpha_i) = \frac{N''N_1}{MN} = \frac{\frac{\partial V_i}{\partial x_j} dx_j dt}{dx_j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dt$$

Ainsi, on note que le gradient de vitesse correspond à la **vitesse de déformation angulaire** relative à la direction \vec{x}_i :

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{d\alpha_i}{dt} \tag{I.22}$$

On trouverait de même que selon \vec{x}_j : $\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{d\alpha_j}{dt}$ qui correspond à la vitesse de déformation angulaire selon \vec{x}_j . En recomposant ces deux mouvements (Fig. I.8), le carré initial est devenu $M_3N_3M'_3N'_3$ et la déformation angulaire totale $d\alpha_i + d\alpha_j = d\alpha_{ij}$, relative au plan (\vec{x}_i, \vec{x}_j) vaut :

$$\frac{d\alpha_{ij}}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = 2\theta_k \quad \text{soit : } \theta_k = \frac{1}{2} \frac{d\alpha_{ij}}{dt} \tag{I.23}$$

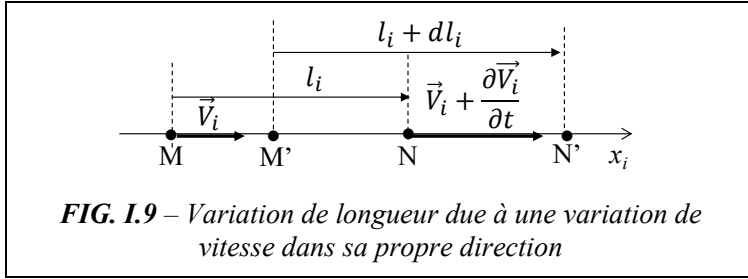


On constate que θ_k correspond à la moitié de la **vitesse de déformation angulaire** dans le plan (\vec{x}_i, \vec{x}_j) .

Dans le schéma précédent il n'a été tenu compte que des déformations angulaires dues à la variation d'une projection de la vitesse selon une direction perpendiculaire. Il est évident

que, dans le cas général, il y a également une variation de la vitesse selon sa propre direction. Il y a alors variation de la **longueur** des segments (Fig. I.9). Un segment de longueur l_i selon la direction \vec{x}_i augmente de la quantité $dl_i = l_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} dt$ pendant le temps dt . Si $d\varepsilon_i = dl_i / l_i$ est l'**allongement unitaire** dans cette direction, on peut écrire :

$$d\varepsilon_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} dt \quad \text{soit} \quad \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{d\varepsilon_i}{dt} \quad (\text{I.24})$$



La quantité $\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{d\varepsilon_i}{dt}$ représente la **vitesse de déformation longitudinale** selon la direction \vec{x}_i .

En conclusion, on remarque que le vecteur \vec{D} a des composantes, données par l'équation (I.20), qui sont proportionnelles à la fois aux vitesses de déformations angulaires (Éq. (I.23)) et aux vitesses de déformations longitudinales (Éq. (I.24)). On l'appelle vecteur **vitesse de déformation** et ses composantes sont :

$$D_i = l_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} + \frac{1}{2} \left(l_j \frac{d\alpha_{ij}}{dt} + l_k \frac{d\alpha_{ik}}{dt} \right) \quad (\text{I.25})$$

Le vecteur vitesse de déformation \vec{D} peut aussi être écrit en faisant appel à la notion de **tenseur des vitesses de déformations** qui est également appelé **tenseur des taux de déformation** :

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \theta_1 \\ \theta_2 & \theta_1 & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\varepsilon_1}{dt} & \frac{1}{2} \frac{d\alpha_{12}}{dt} & \frac{1}{2} \frac{d\alpha_{13}}{dt} \\ \frac{1}{2} \frac{d\alpha_{21}}{dt} & \frac{d\varepsilon_2}{dt} & \frac{1}{2} \frac{d\alpha_{23}}{dt} \\ \frac{1}{2} \frac{d\alpha_{31}}{dt} & \frac{1}{2} \frac{d\alpha_{32}}{dt} & \frac{d\varepsilon_3}{dt} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right\| \quad (\text{I.26})$$

qui est un tenseur symétrique puisque $d\alpha_{ij} = d\alpha_{ji}$. On a alors :

$$\vec{D} = \overline{\overline{D}} \overline{MM'} \quad (\text{I.27})$$

et enfin :

$$\overline{V_{M'}} = \overline{V_M} + \overline{M'M} \wedge \vec{T} + \vec{D} \quad (\text{I.28})$$

ou encore :

$$\overline{V_{M'}} = \overline{V_M} + \overline{M'M} \wedge \frac{1}{2} \overline{\text{rot} \vec{V}} + \overline{\overline{D}} \overline{MM'} \quad (\text{I.29})$$

Ainsi, la vitesse apparaît bien comme la somme :

- d'une vitesse due à la translation \vec{V}_M ;
- d'une vitesse due à la rotation $\vec{R}o = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} \wedge \overline{MM'}$;
- d'une vitesse due à la déformation $\vec{D} = \overline{\overline{D.MM'}}$

2. Paramètres ou variables d'état des fluides

2.1. État d'équilibre et transformation d'un système – Réversibilité - Irréversibilité

Un système est dit en **état d'équilibre** (EE) lorsqu'il ne se produit aucune modification du système au cours du temps. L'**équilibre** est **stable** si, après une évolution fortuite faible d'un paramètre du système, celui-ci revient à l'équilibre spontanément sans intervention extérieure. En thermodynamique technique, par exemple, on ne s'intéresse qu'aux échanges ayant lieu entre le système et le milieu extérieur lors du passage du système d'un état d'équilibre à un autre état d'équilibre.

Une **transformation** ou **évolution** est dite **cyclique** ou **fermée** si le système évolue d'un état d'équilibre A pour revenir à ce même état d'équilibre A à la fin de la transformation. Une transformation est dite **ouverte** lorsque l'état d'équilibre final B est différent de l'état initial A (Fig. I.10). En pratique, ces deux états peuvent être réunis par des trajets différents. Si le système évolue de l'état A à l'état B par une succession d'états d'équilibre, les **transformations** correspondantes sont dites **réversibles** puisqu'on passe indifféremment d'un état à un état infiniment proche dans un sens ou dans l'autre avec des variations infiniment petites des paramètres d'état. *De telles transformations* ne peuvent avoir lieu que de manière infiniment lente et *n'ont* donc *qu'une existence théorique*. Toutes les *transformations réelles sont irréversibles*, car effectuées avec des déséquilibres plus ou moins importants pour avoir une cinétique de transformation non nulle. Cependant, avec la notion de **fonctions d'état** (Cf. § 2.3), le calcul de certaines évolutions relatives à des transformations irréversibles peut se faire à partir de transformations réversibles ayant les mêmes états initial et final que ceux de la transformation réelle irréversible. Ceci constitue *l'intérêt pratique des transformations réversibles pour résoudre un grand nombre de problèmes réels*.

