Chapitre 1

Modèles discrets

Le but de ce chapitre est de présenter les principales idées de la théorie des options dans le cadre mathématiquement très simple des modèles discrets. Nous y reprenons essentiellement la première partie de Harrison et Pliska (1981). Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein est présenté en fin de chapitre sous forme de problème corrigé, pour illustrer la théorie de façon plus concrète.

1.1 Le formalisme des modèles discrets

1.1.1 Les actifs financiers

Un modèle de marché financier discret est construit sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration, c'est-à-dire d'une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$. La tribu $\mathcal{F}_n$ représente l'information disponible à l'instant n et est appelée *tribu des événements antérieurs à l'instant* n. L'*horizon* N sera le plus souvent, dans la pratique, la date d'échéance des options.

On supposera, dans la suite, que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, où $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de l'ensemble fini Ω, et que $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$, pour tout $\omega \in \Omega$. Le fait de travailler sur un espace de probabilité fini permet d'éviter certaines difficultés techniques : par exemple, toutes les variables aléatoires réelles sont intégrables.

Le marché est constitué de $(d+1)$ actifs financiers, dont les prix à l'instant n sont donnés par des variables aléatoires S_n^0, S_n^1, ..., S_n^d, à valeurs strictement positives, mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n$ (les investisseurs ont connaissance des cours actuels et passés, mais pas des cours futurs). Le vecteur $S_n = (S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^d)$ est le vecteur des prix à l'instant n. L'actif numéroté 0 est *l'actif sans risque* et on pose, par convention, $S_0^0 = 1$. Si le taux d'intérêt des placements sans risque sur une période est constant et égal à r, on a $S_n^0 = (1 + r)^n$. Le coefficient $\beta_n = 1/S_n^0$ apparaît comme le coefficient d'actualisation : c'est la somme d'argent qui, investie à l'instant 0 dans l'actif sans risque, permet de disposer de 1 euro à l'instant n (si on compte les prix en euros). Les actifs numérotés de 1 à d sont appelés *actifs risqués*.

1.1.2 Les stratégies

Une *stratégie de gestion* est définie par un processus (simplement une suite dans le cas discret) aléatoire

$$\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$$

à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$, donnant à chaque instant n les quantités ϕ_n^i des divers actifs, détenues en portefeuille. On impose à la suite ϕ d'être *prévisible* au sens suivant :

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, d\} \begin{cases} \phi_0^i \text{ est } \mathcal{F}_0\text{-mesurable} \\ \text{et, pour } n \geq 1, \quad \phi_n^i \text{ est } \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable.} \end{cases}$$

La signification de cette hypothèse est la suivante. Le portefeuille à la date n

$$(\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d)$$

est constitué au vu des informations disponibles à la date $(n-1)$ et conservé tel quel au moment des cotations de la date n.

La *valeur du portefeuille* à l'instant n est donnée par le produit scalaire

$$V_n(\phi) = \phi_n.S_n = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i S_n^i.$$

Sa *valeur actualisée* est

$$\tilde{V}_n(\phi) = \beta_n(\phi_n.S_n) = \phi_n.\tilde{S}_n,$$

où $\beta_n = 1/S_n^0$ et $\tilde{S}_n = (1, \beta_n S_n^1, \ldots, \beta_n S_n^d)$ est le vecteur des *prix actualisés* des actifs. Considérer les prix actualisés revient à considérer le prix de l'actif sans risque comme *numéraire* (voir l'exercice 3 pour une introduction aux techniques de changement de numéraire).

On dira qu'une stratégie est *auto-financée* si la relation suivante est vérifiée pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$:

$$\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n.$$

Cette égalité s'interprète de la façon suivante : à l'instant n, après avoir pris connaissance des cours $S_n^0, \cdots, S_n^d$, l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition ϕ_n à la composition ϕ_{n+1}, le réajustement se faisant aux cours de la date n, en réinvestissant la valeur totale du portefeuille et rien de plus. Il n'y a donc ni apports, ni retraits de fonds (en particulier, il n'y a pas de consommation).

Remarque 1.1.1 L'égalité $\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n$ est évidemment équivalente à :

$$\phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1}.S_{n+1} - \phi_n.S_n,$$

ou encore à

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n).$$

A l'instant $n+1$, la valeur du portefeuille est $\phi_{n+1}.S_{n+1}$ et la différence $\phi_{n+1}.S_{n+1} - \phi_{n+1}.S_n$ représente le gain (net) dû à la variation des cours entre les instants n et $n+1$. Une stratégie auto-financée est donc une stratégie pour laquelle les variations de valeur du portefeuille viennent uniquement des gains dus à l'agitation des cours.

La proposition suivante permet de préciser cette remarque en termes de quantités actualisées.

Proposition 1.1.2 *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La stratégie ϕ est auto-financée.*

(ii) *Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,*

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta S_j,$$

où ΔS_j est le vecteur $S_j - S_{j-1}$.

(iii) *Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,*

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j,$$

où $\Delta \tilde{S}_j$ est le vecteur $\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$.

Démonstration. L'équivalence entre (i) et (ii) résulte de la Remarque 1.1.1. L'équivalence entre (i) et (iii) s'obtient en remarquant que $\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n$ si et seulement si $\phi_n.\tilde{S}_n = \phi_{n+1}.\tilde{S}_n$. $\square$

Cette proposition montre que, pour toute stratégie auto-financée, la valeur actualisée (et, donc, la valeur tout court) du portefeuille est complètement déterminée par la richesse initiale et le processus $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$ des quantités d'actifs *risqués* détenues au cours du temps. Cela vient simplement du fait que $\Delta \tilde{S}_j^0 = 0$, pour $j \in \{0, \dots N\}$. Plus précisément, on peut énoncer la proposition suivante.

Proposition 1.1.3 *Pour tout processus prévisible $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et pour toute variable V_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable, il existe un unique processus prévisible $(\phi_n^0)_{0 \leq n \leq N}$ tel que la stratégie $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ soit auto-financée et de valeur initiale V_0.*

Démonstration. La condition d'auto-financement entraîne

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_n(\phi) &= \phi_n^0 + \phi_n^1 \tilde{S}_n^1 + \dots + \phi_n^d \tilde{S}_n^d \\
&= V_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d \right),
\end{aligned}$$

ce qui détermine ϕ_n^0. La seule chose à vérifier est la prévisibilité de ϕ^0, qui résulte immédiatement de l'égalité

$$\begin{aligned}\phi_n^0 &= V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d \right) \\ &\quad + \left(\phi_n^1 \left(-\tilde{S}_{n-1}^1 \right) + \cdots + \phi_n^d \left(-\tilde{S}_{n-1}^d \right) \right).\end{aligned}$$

□

1.1.3 Stratégies admissibles et arbitrage

Nous n'avons pas imposé de condition sur le signe des quantités ϕ_n^i. Dire que $\phi_n^0 < 0$ signifie qu'on a *emprunté* la quantité $|\phi_n^0|$ sur le marché des placements sans risque. Dire que $\phi_n^i < 0$, pour un $i \geq 1$, c'est dire qu'on a des dettes libellées en actif risqué (par suite de *ventes à découvert*). Les emprunts et les ventes à découvert sont donc permis, mais nous imposerons à la valeur du portefeuille d'être positive ou nulle à tout instant.

Définition 1.1.4 Une stratégie ϕ est dite *admissible* si elle est auto-financée et si $V_n(\phi) \geq 0$ pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

L'investisseur doit donc être en mesure de rembourser ses emprunts à tout instant. La notion d'*arbitrage* (réalisation d'un profit sans prendre de risque) est alors formalisée de la façon suivante.

Définition 1.1.5 Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle.

En d'autres termes, un arbitrage part d'une richesse initiale nulle, maintient une richesse positive au cours du temps, et parvient à une richesse finale qui est strictement positive avec probabilité non nulle. La plupart des modèles excluent toute possibilité d'arbitrage et l'objet de la section suivante est de donner une caractérisation de ces modèles grâce à la notion de martingale.

1.2 Martingales et arbitrages

Avant d'établir le lien entre martingales et arbitrage, nous allons définir la notion de *martingale* sur un espace de probabilité fini. Pour cela, l'usage de l'espérance conditionnelle par rapport à une sous-tribu est indispensable, et nous renvoyons à l'appendice pour un exposé des principales propriétés de cet outil.

1.2.1 Martingales et transformées de martingales

Dans cette section, on considère un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et, pour tout $\omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ (sans supposer $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$, ni $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$). Une suite $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ de variables aléatoires est dite *adaptée* à la filtration si, pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Définition 1.2.1 Une suite adaptée $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ de variables aléatoires réelles est une

- martingale si $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$ pour tout $n \leq N-1$;
- sur-martingale si $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq M_n$ pour tout $n \leq N-1$;
- sous-martingale si $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq M_n$ pour tout $n \leq N-1$.

Ces définitions s'étendent aux vecteurs aléatoires : on dit par exemple qu'une suite $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est une martingale si chacune des coordonnées du vecteur M_n est une martingale réelle.

Dans un contexte financier, dire que le cours $(S_n^i)_{0 \leq n \leq N}$ de l'actif i est une martingale revient à dire que, à tout instant n, la meilleure estimation (au sens des moindres carrés) que l'on puisse faire de S_{n+1}^i, à partir des informations disponibles à la date n, est donnée par S_n^i.

Les propriétés suivantes, qui se déduisent aisément de la définition qui précède, constitueront pour le lecteur de bons exercices de maniement de l'espérance conditionnelle.

1. $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ est martingale si et seulement si
$$\mathbb{E}(M_{n+j}|\mathcal{F}_n) = M_n \quad \forall j \geq 0.$$
2. Si $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale, on a, pour tout n, $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0)$.
3. La somme de deux martingales est une martingale.
4. On a évidemment des propriétés analogues pour les sur-martingales et les sous-martingales.

Définition 1.2.2 Une suite adaptée $(H_n)_{0 \leq n \leq N}$ de variables aléatoires est dite *prévisible* si, pour tout $n \geq 1$, H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.

Proposition 1.2.3 *Soit $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ une martingale et $(H_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$. On pose $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$. La suite $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ définie par*

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 M_0 \\ X_n &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \cdots + H_n \Delta M_n \quad \textit{pour } n \geq 1, \end{aligned}$$

est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$.

La suite (X_n) est parfois appelée *transformée de la martingale* (M_n) par la suite (H_n). Une conséquence de cette proposition et de la Proposition 1.1.2 est que, dans les modèles financiers où les prix actualisés des actifs sont des martingales, toute stratégie auto-financée conduit à une valeur finale actualisée égale, *en moyenne* à la richesse initiale.

Démonstration. Il est clair que (X_n) est une suite adaptée. De plus, pour $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(H_{n+1}(M_{n+1} - M_n)|\mathcal{F}_n) \\
&= H_{n+1}\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n) \text{ car } H_{n+1} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n) = X_n,$$

ce qui prouve que (X_n) est une martingale. □

La proposition suivante donne une caractérisation des martingales qui nous sera utile par la suite.

Proposition 1.2.4 *Une suite adaptée de variables aléatoires réelles (M_n) est une martingale si et seulement si pour toute suite prévisible (H_n), on a*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n\right) = 0.$$

Démonstration. Si (M_n) est une martingale, il en est de même, par la Proposition 1.2.3, de la suite (X_n) définie par $X_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $X_n = \sum_{j=1}^{n} H_j \Delta M_j$, pour toute suite prévisible (H_n). On a donc $\mathbb{E}(X_N) = \mathbb{E}(X_0) = 0$. Réciproquement, on remarque que si $j \in \{1, \ldots, N\}$, à tout événement $A \in \mathcal{F}_j$, on peut associer la suite prévisible (H_n) définie par $H_n = 0$ pour $n \neq j+1$ et $H_{j+1} = \mathbf{1}_A$. Il est clair que la suite (H_n) est prévisible et l'égalité $\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n\right) = 0$ donne

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A(M_{j+1} - M_j)) = 0,$$

et par conséquent $\mathbb{E}(M_{j+1}|\mathcal{F}_j) = M_j$. □

1.2.2 Marchés financiers viables

Nous revenons aux modèles de marchés discrets introduits dans la Section 1.1.

Définition 1.2.5 On dit que le marché est *viable* s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

Le théorème suivant est appelé en anglais *Fundamental Theorem of Asset Pricing*.

Théorème 1.2.7 *Le marché est viable si, et seulement si, il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente*[1] *à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

[1] Rappelons que deux probabilités $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sont équivalentes si et seulement si, pour tout événement A, on a $\mathbb{P}_1(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}_2(A) = 0$. Ici, $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$.

Pour montrer que l'absence d'opportunité d'arbitrage implique l'existence d'une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.2.6 *Si le marché est viable, pour tout processus prévisible $(\phi^1, \ldots, \phi^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on a*

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d \right) \notin \Gamma.$$

où Γ désigne l'ensemble des variables aléatoires X positives telles que

$$\mathbb{P}(X > 0) > 0.$$

Démonstration. Au processus prévisible $\underline{\phi} = (\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d)$, associons le processus $\tilde{G}(\underline{\phi}) = (\tilde{G}_n(\phi^1, \ldots, \phi^d))_{0 \leq n \leq N}$ défini par

$$\tilde{G}_n(\underline{\phi}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d \right).$$

Supposons que $\tilde{G}_N(\underline{\phi}) \in \Gamma$, et montrons qu'alors le marché n'est pas viable.

Remarquons que $\tilde{G}(\underline{\phi})$ est le processus des gains actualisés cumulés dans toute stratégie auto-financée dont le portefeuille de date n contient les quantités d'actifs *risqués* $\phi_n^1, \ldots, \phi_n^d$. D'après la Proposition 1.1.3, il existe un (unique) processus (ϕ_n^0) tel que la stratégie $\phi = (\phi^0, \underline{\phi}) = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d))$ soit auto-financée de valeur initiale nulle. On a alors $\tilde{G}_n(\underline{\phi}) = \tilde{V}_n(\phi)$ pour tout n, et si, pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$, $\tilde{G}_n(\underline{\phi}) \geq 0$, la stratégie ϕ est admissible. Comme $\tilde{G}_N(\underline{\phi}) \in \Gamma$, la valeur finale de ϕ est non nulle, on a donc un arbitrage et le marché n'est pas viable.

Supposons maintenant que les variables aléatoires $\tilde{G}_n(\underline{\phi})$ ne soient pas toutes positives et posons

$$n^* = \max\{n \mid \mathbb{P}(\tilde{G}_n(\underline{\phi}) < 0) > 0\}.$$

On a alors $n^* \leq N - 1$ et, pour $n \in \{n^* + 1, \ldots, N\}$, $\tilde{G}_n(\underline{\phi}) \geq 0$. Soit alors le processus $\underline{\psi} = (\psi^1, \ldots, \psi^d)$ défini par

$$\psi_n^i(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq n^* \\ \mathbf{1}_A(\omega)\phi_n^i(\omega) & \text{si } n > n^*, \end{cases}$$

pour $i = 1, \ldots, d$, avec $A = \{\tilde{G}_{n^*}(\underline{\phi}) < 0\}$. Comme $(\phi^1, \ldots, \phi^d)$ est prévisible et $A \in \mathcal{F}_{n^*}$, le processus $(\psi^1, \ldots, \psi^d)$ est aussi prévisible. De plus,

$$\tilde{G}_n(\underline{\psi}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq n^* \\ \mathbf{1}_A(\tilde{G}_n(\phi) - \tilde{G}_{n^*}(\phi)) & \text{si } n > n^*. \end{cases}$$

On en déduit que $\tilde{G}_n(\underline{\psi}) \geq 0$ pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$ et $\tilde{G}_N(\psi) > 0$ sur A. On peut alors associer au processus $\underline{\psi}$ une stratégie admissible ψ de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle et conclure que le marché n'est pas viable. $\square$

Démonstration du Théorème 1.2.7 : (a) Supposons qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Alors, pour toute stratégie auto-financée (ϕ_n), on a, d'après la Proposition 1.1.2,

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j.\Delta\tilde{S}_j.$$

On en déduit, grâce à la proposition 1.2.3, que $(\tilde{V}_n(\phi))$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale et, donc, que

$$\mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_0(\phi)).$$

Si la stratégie est admissible et de valeur initiale nulle, on obtient $\mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = 0$, avec $\tilde{V}_N(\phi) \geq 0$. D'où $\tilde{V}_N(\phi) = 0$, puisque $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$, pour tout $\omega \in \Omega$.

(b) Supposons maintenant le marché viable et notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables aléatoires de la forme

$$\tilde{G}_N(\underline{\phi}) = \sum_{j=1}^{N} \left(\phi_j^1 \Delta\tilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \Delta\tilde{S}_j^d\right),$$

où $\underline{\phi} = (\phi^1, \ldots, \phi^d)$ est un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Il est clair que $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^\Omega$ de toutes les variables aléatoires réelles.

D'après le Lemme 1.2.6, les ensembles $\mathcal{V}$ et Γ ont une intersection vide et si on pose

$$K = \{X \in \Gamma \mid \sum_{\omega} X(\omega) = 1\}$$

L'ensemble K est un convexe compact de $\mathbb{R}^\Omega$ et, comme $K \subset \Gamma$, on a $K \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Il résulte alors du Théorème de séparation des convexes (voir l'appendice), qu'il existe un vecteur $(\lambda(\omega))_{\omega \in \Omega}$ tel que

1. Pour tout $X \in K$, $\quad \sum_{\omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$.
2. Pour tout processus prévisible $\underline{\phi}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$,

$$\sum_{\omega} \lambda(\omega) \tilde{G}_N(\underline{\phi})(\omega) = 0.$$

De la première propriété, on déduit que $\lambda(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, de sorte que la probabilité $\mathbb{P}^*$ définie par

$$\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')}$$