

# Chapitre I

## Endommagement par contraintes monotones

### 1. PROCESSUS D'ENDOMMAGEMENT

Un matériau est considéré sain s'il est dépourvu de fissures à l'échelle microscopique, ou, de manière plus réaliste si son comportement est celui d'un matériau élaboré dans les meilleures conditions possibles [1.1]. L'étude de l'endommagement s'intéresse à l'évolution du matériau depuis le stade initial, où le matériau est qualifié de sain, jusqu'au stade où le matériau est considéré complètement endommagé, stade caractérisé par la présence de fissures de la taille de l'élément de volume représentatif du matériau. Cet élément de volume est suffisamment grand par rapport aux hétérogénéités du matériau pour être considéré homogène : cube de 0,1 à 1 mm de côté pour les métaux et les polymères, de 1 à 10 mm pour les composites et le bois, de 100 mm pour les bétons. Le but est donc de connaître à chaque instant l'état du matériau, son taux d'endommagement et de prévoir l'instant final défini précédemment.

Au delà de cette phase d'endommagement se produit la propagation de fissuration selon différents mécanismes en fonction du matériau et du mode de sollicitation.

- La propagation de la fissure peut être spontanée dans le cas de la rupture fragile si la longueur critique de fissure au sens de la mécanique de la rupture a été atteinte [1.2]. On est en présence d'un phénomène catastrophique d'instabilité.
- La croissance de la fissure, stable dans le cas de la rupture ductile, dépend de la vitesse de chargement de la structure. Dans le bilan énergétique on prend en considération l'énergie dissipée par déformation plastique à la pointe de la fissure.
- Lors du fluage des métaux à température élevée la fissure croît sous sollicitation constante. La vitesse de propagation dépend de la contrainte appliquée.
- Dans le cas de sollicitations répétées périodiques ou non la fissuration de fatigue croît de manière discontinue. La propagation de la fissuration progresse lors des cycles de contrainte et cesse à l'arrêt des sollicitations. Cette discontinuité crée l'aspect strié du faciès de rupture.

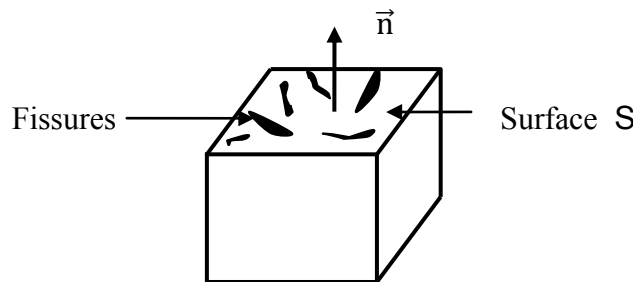
Quel que soit le mécanisme, le stade ultime est la rupture de la structure.

La modélisation de la détérioration progressive de la matière qui précède la rupture macroscopique a été proposée par Kachanov en 1958 dans le cas du fluage des métaux et étendue à la rupture ductile et à la rupture de fatigue à partir de 1970, par J. Lemaitre et J. L. Chaboche [1.1]. D'autres endommagements existent, conséquences de mécanismes physicochimiques : effets de la corrosion ou des radiations par exemples. Les phénomènes peuvent interagir et se cumuler avec les endommagements d'ordre mécanique.

## 2. ELEMENTS DE THEORIE

### 2.1. Variable d'endommagement

A priori au niveau macroscopique, rien ne distingue un matériau endommagé, figure 1.1, d'un matériau sain : des fissures existent mais sont plus petites que la taille de l'élément de volume représentatif du matériau et n'ont pas progressé jusqu'à la rupture de la pièce. Pour mesurer l'endommagement on peut évaluer ce taux de fissuration ou son influence sur des mesures physiques (résistivité par exemple). Il faut ensuite convertir cette évaluation en évolution des caractéristiques mécaniques. La quantification de l'endommagement proposée par Rabotnov et Kachanov, résumée ci après, s'effectue par l'intermédiaire de la mesure de l'évolution de caractéristiques mécaniques globales (caractéristiques d'élasticité, de plasticité ou de viscoplasticité).



*Figure 1.1 : élément de solide endommagé.*

- $S$  est l'aire de la section de l'élément de volume,
- $S_D$  est l'aire totale de l'ensemble des fissures et des défauts, aire corrigée par les facteurs de concentration de contraintes.

Une concentration de contraintes est causée par toute discontinuité présente dans une pièce, fissures en particulier. La contrainte nominale doit être corrigée par un coefficient multiplicateur, facteur de concentration de contrainte  $K_t$ , fonction de la géométrie de la fissure, d'autant plus élevé que la fissure est aigüe et présente un faible rayon de courbure à son extrémité. Il est donc nécessaire de corriger l'aire  $S_D$  des défauts par les valeurs des coefficients  $K_t$ . En ce qui concerne en effet l'accroissement local de contrainte dans la section  $S$ , une fissure de section  $S_D$ , quasi circulaire présentant un  $K_t$  voisin de 2 est tout aussi pénalisante qu'une fissure de section elliptique très aplatie, pointue et de section 10 fois plus petite.

$\bar{S}$  est l'aire résistante effective tenant compte des fissures, des défauts et des concentrations de contraintes.

$$\bar{S} = S - S_D \quad (1.1)$$

Par définition la mesure de la variable mécanique d'endommagement dans la direction  $\vec{n}$  est :

$$D_n = \frac{S_D}{S} \quad (1.2)$$

D'un point de vue physique,  $D_n$  est l'aire relative des défauts (aire corrigée par les concentrations de contraintes).

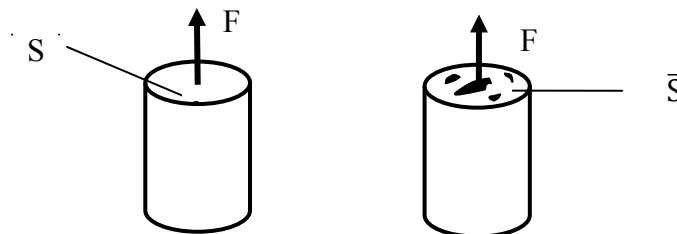
Mathématiquement,  $D_n$  est tel que  $0 < D_n < 1$

- $D_n = 0$  quand le matériau est vierge, non endommagé,
- $D_n = 1$  quand le matériau est rompu.

Si l'endommagement est isotrope,  $D_n = D$  : l'endommagement est identique dans toutes les directions.

## 2.2. Contrainte effective, équivalence en déformation

La contrainte effective est la force rapportée à la section  $\bar{S}$  qui résiste effectivement aux efforts dans le matériau endommagé, figure 1.2.



*Figure 1.2 : matériau sain ; matériau endommagé.*

La contrainte dans le matériau sain s'exprime par :  $\sigma = \frac{F}{S}$  (1.3)

La contrainte dans le matériau endommagé s'exprime par :  $\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{S}}$  (1.4)

Les relations (3) et (4) conduisent à :

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{S}} = \frac{\sigma \cdot S}{\bar{S}} = \frac{\sigma \cdot S}{S - S_D} = \frac{\sigma}{1 - \frac{S_D}{S}} = \frac{\sigma}{1 - D}$$

L'expression de la contrainte effective est alors :

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (1.5)$$

L'hypothèse d'équivalence en déformation suppose que le comportement à la déformation de la matière n'est affecté par l'endommagement que sous la seule forme de la contrainte effective. La loi de comportement du matériau endommagé est la même que celle du matériau sain ; elle est simplement obtenue en remplaçant dans la loi de comportement du matériau sain la contrainte usuelle par la contrainte effective, sans changer le terme de déformation.

$$\begin{aligned} \text{Loi de comportement du matériau sain :} & \quad F(\sigma, \varepsilon, t) = 0 \\ \text{Loi de comportement du matériau endommagé :} & \quad F(\bar{\sigma}, \varepsilon, t) = 0 \end{aligned}$$

### 2.3. Mesure d'endommagement

La loi de Hooke qui, pour un matériau sain, s'exprime par :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (1.6)$$

devient pour le matériau endommagé, d'après le principe d'équivalence en déformation,

$$\varepsilon = \frac{\bar{\sigma}}{E} \quad (1.7)$$

et, en utilisant l'expression de la contrainte effective, équation (5),

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{(1-D)E} \quad (1.8)$$

Soit :

$$\sigma = E(1-D)\varepsilon \quad (1.9)$$

Si on désigne par  $\bar{E}$  le module du matériau endommagé,  $\sigma = \bar{E}\varepsilon$ . On obtient alors :

$$D = 1 - \frac{\bar{E}}{E} \quad (1.10)$$

La quantification de l'endommagement peut s'effectuer à partir de la mesure de l'évolution du module d'élasticité, grandeur mécanique globale. Toute mesure de raideur élastique permet donc de déterminer l'évolution de l'endommagement. On utilise des essais statiques (traction, flexion ...), des méthodes dynamiques (propagation d'ondes ultrasonores).

Selon le type d'endommagement considéré, on peut analyser l'évolution d'autres grandeurs mécaniques pour déterminer l'endommagement [1.1], variation de caractéristiques de plasticité en particulier :

- caractéristiques d'érouissage monotone dans le cas de l'endommagement plastique ductile,
- caractéristiques d'érouissage cyclique dans le cas de l'endommagement par fatigue oligocyclique,
- caractéristiques de viscoplasticité dans le cas de l'endommagement de fluage.

Ces méthodes sont décrites dans les paragraphes I.3 et II.5 consacrés aux endommagements concernés.

### 2.4. Exercice corrigé

#### Enoncé, exercice 1.1.

On considère le diagramme de traction représenté figure 1.3. Le diagramme indique le début de l'essai  $0 < \varepsilon < 3 \cdot 10^{-2}$  et le voisinage de la striction où  $\varepsilon$  est proche de  $22 \cdot 10^{-2}$ . Au

cours de l'essai, lors de l'incursion dans le domaine irréversible plastique, la contrainte de traction est annulée à quatre reprises, pour  $\sigma = 275 \text{ MPa}$ ,  $\sigma = 290 \text{ MPa}$ ,  $\sigma = 315 \text{ MPa}$  et  $\sigma = 400 \text{ MPa}$ . Les valeurs des déformations correspondant à ces quatre annulations de la contrainte sont  $\varepsilon = 1,4 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 22 \cdot 10^{-2}$ . Le retour est parallèle au début de l'évolution linéaire  $\sigma = f(\varepsilon)$  pour les deux premières annulations de la contrainte, lorsque  $\varepsilon = 1,4 \cdot 10^{-2}$  et  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$ .

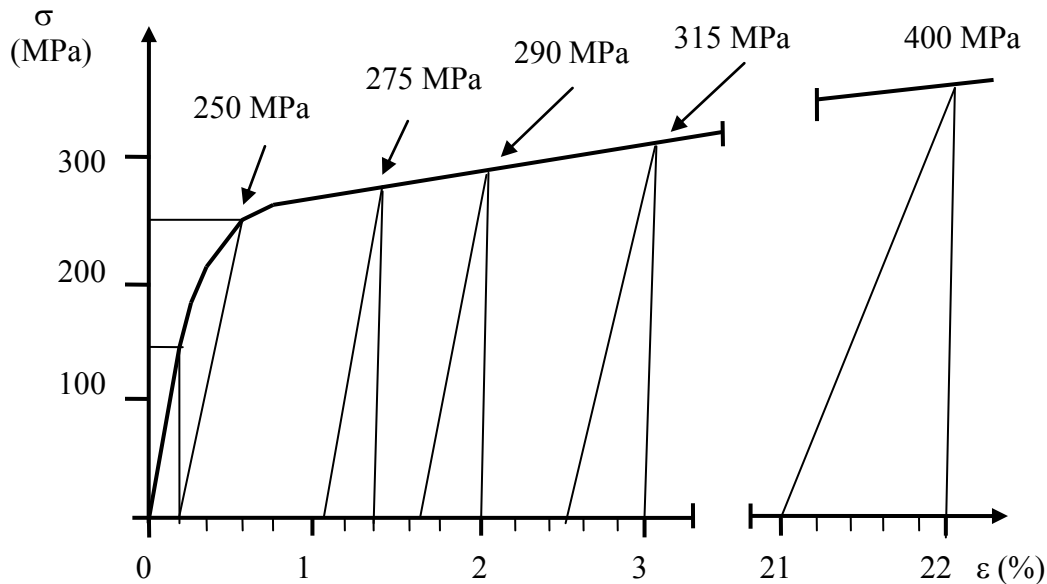


Figure 1.3 : diagramme de traction.

1- Déterminer le module d'élasticité du matériau et sa limite élastique conventionnelle à 0,2% de déformation permanente.

2- Quelle est la nature du matériau ? Quel peut être ce matériau ? Donner un modèle rhéologique approché, calculer les valeurs des éléments de ce modèle.

3- Calculer et tracer l'évolution de l'endommagement du matériau lors de sa déformation plastique.

### Solution

1- Pour une déformation  $\varepsilon = 0,2 \cdot 10^{-2}$  la contrainte est  $\sigma = 150 \text{ MPa}$ . Si  $E$  est le module d'élasticité,  $E = \sigma / \varepsilon$  ainsi,  $E = 75\,000 \text{ MPa}$ .

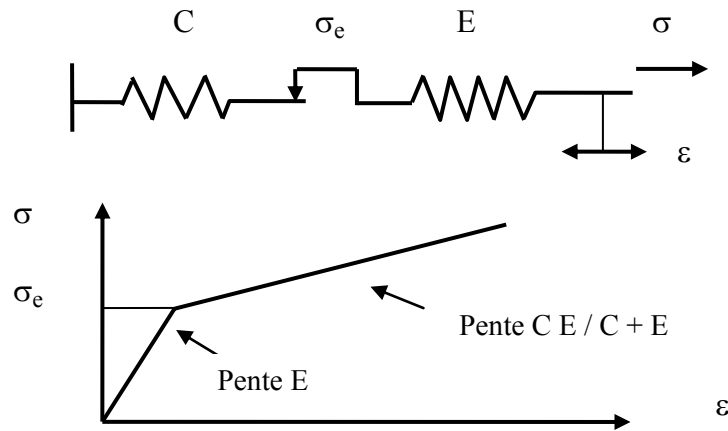
Une droite, parallèle à l'évolution linéaire du début du diagramme de traction et passant par le point d'abscisse  $\varepsilon = 0,2 \cdot 10^{-2}$  coupe le diagramme à une ordonnée  $\sigma = 250 \text{ MPa}$  : la limite élastique conventionnelle à 0,2% de déformation permanente est cette valeur  $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$ .

2- Après l'évolution linéaire (élastique), la déformation plastique s'effectue à contrainte croissante. Il s'agit d'un matériau élastoplastique avec écrouissage. Le module d'élasticité est égal à  $75\,000 \text{ MPa}$ , il s'agit d'un alliage d'aluminium.

Le modèle analogique et son évolution  $\sigma = f(\varepsilon)$  sont représentés figure 1.4.

- Tant que  $\sigma < \sigma_e$ , seule l'élasticité  $E$  est sollicitée ( $E = 75\,000 \text{ MPa}$ ).
- Dès que  $\sigma$  atteint  $\sigma_e$  ( $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$ ) les deux élasticités en série,  $E$  et  $C$  sont sollicitées. L'inverse de la raideur résultante est la somme des inverses des deux raideurs  $C$  et  $E$ .

La raideur équivalente à ces deux élasticités en série est donc  $C.E / (C+ E)$ , déterminée par la pente de l'évolution  $\sigma = f(\varepsilon)$  dans le domaine plastique. Connaissant  $E$  et déterminant la pente sur la figure 1.3 on déduit  $C = 2\,590$  MPa.



**Figure 1.4 : modèle élastoplastique avec écrouissage.**  
Représentation analogique et évolution  $\sigma = f(\varepsilon)$ .

3- La contrainte est annulée pour  $\varepsilon = 1,4 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 22 \cdot 10^{-2}$ . Le retour à la contrainte nulle,  $\sigma = 0$ , est linéaire et correspond à l'élasticité  $\bar{E}$  du matériau après déformation.

- Si  $\sigma = 275$  MPa, le retour est parallèle au début de l'évolution linéaire  $\sigma = f(\varepsilon)$  le module élastique n'a pas évolué,  $\bar{E} = E = 75\,000$  MPa.
- si  $\sigma = 290$  MPa, comme précédemment, le retour est parallèle au début de l'évolution linéaire  $\sigma = f(\varepsilon)$  le module élastique n'a pas évolué,  $\bar{E} = E = 75\,000$  MPa.

Pour les autres retours linéaires on détermine graphiquement la pente  $\bar{E}$  égale à la contrainte atteinte divisée par la récupération élastique, déterminée sur la figure 1.3.

- Si  $\sigma = 315$  MPa, la déformation est de 3 %, la récupération élastique est :  $(3 - 2,5) \cdot 10^{-2} = 0,5 \cdot 10^{-2}$  ainsi  $\bar{E} = E = 63\,000$  MPa.
- Si  $\sigma = 400$  MPa, la déformation est de 22 %, la récupération élastique est :  $(22 - 21) \cdot 10^{-2} = 10^{-2}$  ainsi  $\bar{E} = 40\,000$  MPa.

La valeur de l'endommagement, déterminée par  $D = 1 - \frac{\bar{E}}{E}$  tableau 1.1, est tracée figure 1.5.

Déformation $\varepsilon$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$22 \cdot 10^{-2}$
$\bar{E}$ (MPa)	75 000	75 000	63 000	40 000
D	0	0	0,15	0,47

**Tableau 1.1 : valeurs du module et de l'endommagement en fonction de la déformation.**

L'endommagement est significatif au voisinage de la striction ( $\varepsilon = 22 \cdot 10^{-2}$ ) et est initié pour une déformation  $2 \cdot 10^{-2} < \varepsilon < 3 \cdot 10^{-2}$ . On observe un seuil en deçà duquel la déformation plastique n'est pas accompagnée d'endommagement. L'évolution de D n'est pas linéaire en fonction de la déformation.

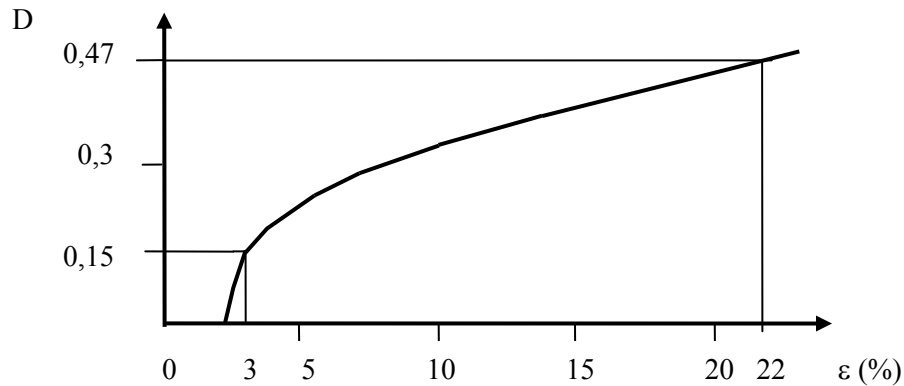


Figure 1.5 : évolution de l'endommagement au cours de la déformation.

### 3. CONTRAINTES CROISSANTES OU CONSTANTES

On s'intéresse à l'endommagement plastique ductile, objet de l'exercice 1.1, endommagement dû à la naissance et la croissance de cavités au cours de la déformation plastique du matériau. On considère ensuite l'endommagement de fluage, sous sollicitations constantes.

#### 3.1. Endommagement plastique ductile linéaire en déformation

L'évolution de l'endommagement est linéaire au cours de la déformation, figure 1.6.

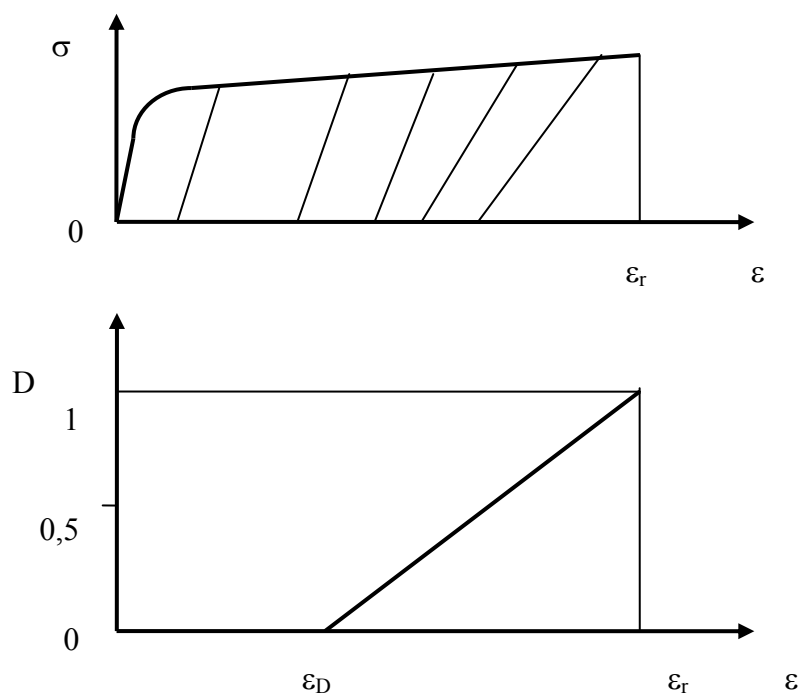


Figure 1.6 : endommagement plastique ductile linéaire en déformation [1.1].

La loi d'endommagement plastique ductile linéaire en déformation, équation de l'évolution linéaire  $D = f(\varepsilon)$  s'exprime donc par :

$$D = D_C \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \right) \quad (1.11)$$

- $\varepsilon_D$  : seuil de déformation permanente en deçà duquel  $D = 0$ ,
- $\varepsilon_R$  : déformation à la rupture,
- $D_C$  : endommagement critique à la rupture.

Les coefficients  $\varepsilon_D$ ,  $\varepsilon_R$ ,  $D_C$  sont indiqués tableau 1.2 pour quelques matériaux. On remarque que l'endommagement peut être initié dès le début de la déformation,  $\varepsilon_D = 0$ .

Matériau	Température (°C)	$\varepsilon_D$	$\varepsilon_R$	$D_C$
Cuivre 99,9 %	20	0,35	1,04	0,85
Acier XC 38	20	0	0,56	0,22
Acier E 24	20	0,5	0,88	0,17
Alliage AU4 G1	20	0,03	0,25	0,23
Alliage INCO 718	20	0,02	0,29	0,24

**Tableau 1.2 : valeurs de coefficients d'endommagement plastique ductile [1.1].**

### Remarque

En complément de l'évolution du module d'élasticité, on peut caractériser l'endommagement plastique ductile par la variation des caractéristiques d'écrouissage monotone. Comme illustré dans l'exercice 1.1, figure 1.3, l'écrouissage traduit un écoulement plastique qui se produit avec augmentation de la contrainte. Le phénomène est dû au blocage du mouvement des dislocations dont la densité augmente au cours de la déformation plastique. Dans cette zone d'écrouissage positif,  $d\sigma/d\varepsilon > 0$ , la contrainte croît jusqu'à ce que la contrainte ultime soit atteinte : à ce point d'apparition de la striction,  $d\sigma/d\varepsilon = 0$ .

La déformation élastoplastique  $\varepsilon$  est la somme de la déformation élastique  $\varepsilon_e$  et de la déformation plastique  $\varepsilon_p$ . Si on se place avant la striction et avant le début de l'endommagement,

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad \text{avec} \quad \varepsilon_p = g(\sigma) \quad (1.12)$$

$$\varepsilon_p = g(\sigma) = \left[ \frac{\sigma - \sigma_e}{K} \right]^M \quad \text{avec} \quad \sigma > \sigma_e \quad (1.13)$$

$\sigma = g^{-1}(\varepsilon_p)$  est appelée loi d'écrouissage

- $\sigma_e$  est la limite élastique,
- $M$  est l'exposant d'écrouissage,
- $K$  est le coefficient de résistance plastique.

$K$  et  $M$  dépendent du matériau et sont déterminés graphiquement sur l'évolution logarithmique de la courbe d'écrouissage  $\sigma = f(\varepsilon)$  avant le début d'endommagement [1.1].