CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

§ 1. Coordonnées généralisées

Une des notions fondamentales de la Mécanique est celle de *point matériel* [1]. On désigne ainsi un corps dont on peut négliger les dimensions lorsqu'on décrit son mouvement. Bien entendu, cette possibilité dépend des conditions concrètes de tel ou tel problème. Ainsi, on peut considérer les planètes comme des points matériels lorsqu'on étudie leur mouvement autour du Soleil, mais non pas, évidemment, lorsqu'on considère leur rotation diurne.

La position d'un point matériel dans l'espace est déterminée par son rayon vecteur $\mathbf{r}$, dont les composantes coïncident avec ses coordonnées cartésiennes x, y, z. La dérivée de $\mathbf{r}$ par rapport au temps t

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

est appelée vitesse et la dérivée seconde $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, accélération du point. Par la suite, selon l'habitude admise, nous noterons la dérivation par rapport au temps au moyen d'un point sur la lettre: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

Pour déterminer la position d'un système de N points matériels dans l'espace, il faut se donner N rayons vecteurs, c'est-à-dire $3N$ coordonnées. En général, le nombre des grandeurs indépendantes qu'il faut se donner pour déterminer de façon univoque la position d'un système est appelé nombre de *degrés de liberté* du système. Dans le cas présent, ce nombre est égal à $3N$. Ces grandeurs ne sont pas forcément les coordonnées cartésiennes du point, et selon les conditions du problème, le choix d'un autre système de coordonnées peut être plus commode, s grandeurs quelconques $q_1, q_2, \ldots, q_s$ caractérisant complètement la position d'un système (à s degrés de liberté) sont appelées ses *coordonnées généralisées*, et les dérivées $\dot{q}_i$, ses *vitesses généralisées*.

Il ne suffit pas cependant de se donner les coordonnées généralisées pour déterminer « l'état mécanique » du système à un instant

[1] Au lieu du terme « point matériel » nous emploierons souvent le mot « particule ».

donné, en ce sens que cela ne permet pas de prévoir la position du système à l'instant suivant. Pour des valeurs données des coordonnées, un système peut posséder des vitesses arbitraires, et pour les différentes valeurs de celles-ci, la position du système sera différente à l'instant suivant (c'est-à-dire après un intervalle de temps infiniment petit dt).

L'expérience montre que la donnée simultanée des coordonnées et des vitesses détermine complètement l'état du système et permet, en principe, de prédire son mouvement futur. Au point de vue mathématique, cela signifie que la donnée des coordonnées q et des vitesses $\dot{q}$ à un certain instant définit de façon univoque la valeur des accélérations $\ddot{q}$ à cet instant [1].

Les relations qui lient les accélérations aux coordonnées et aux vitesses sont appelées *équations du mouvement*. Par rapport aux fonctions $q(t)$, ce sont des équations différentielles du second ordre dont l'intégration permet en principe de déterminer ces fonctions, c'est-à-dire les trajectoires du mouvement du système mécanique.

§ 2. Le principe de moindre action

La formule la plus générale de la loi du mouvement des systèmes mécaniques est fournie par le *principe* dit *de moindre action* (ou *principe de Hamilton*). Selon ce principe, tout système mécanique est caractérisé par une fonction définie:

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t)$$

ou plus brièvement $L(q, \dot{q}, t)$, le mouvement du système satisfaisant à la condition suivante.

Supposons qu'aux instants $t = t_1$ et $t = t_2$ le système occupe des positions déterminées, caractérisées par les deux ensembles de valeurs des coordonnées $q^{(1)}$ et $q^{(2)}$. Entre ces positions, le système se meut alors de telle façon que l'intégrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{2,1}$$

ait la plus petite valeur possible [2]. La fonction L est appelée *fonction de Lagrange* du système, et l'intégrale (2,1) *l'action*.

---

[1] Pour simplifier l'écriture, nous désignerons souvent par q l'ensemble de toutes les coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_s$ (et par $\dot{q}$ l'ensemble de toutes les vitesses).

[2] Il convient cependant de noter que le principe de moindre action ainsi formulé n'est pas toujours valable pour la totalité de la trajectoire du mouvement, mais seulement pour chaque partie suffisamment petite de celle-ci; pour toute la trajectoire, l'intégrale (2,1) peut n'avoir qu'un extremum qui ne sera pas nécessairement un minimum. Cette circonstance n'est cependant pas essentielle pour l'établissement des équations du mouvement, qui n'utilise qu'une condition d'extremum.

La fonction de Lagrange ne renferme que q et $\dot{q}$, mais pas les dérivées supérieures $\ddot{q}$, $\dddot{q}$, . . . Cela est dû au fait indiqué plus haut que l'état mécanique d'un système est complètement défini par ses coordonnées et ses vitesses.

Etablissons maintenant les équations différentielles qui déterminent le minimum de l'intégrale (2,1). Pour simplifier l'écriture, admettons d'abord que le système ne possède qu'un seul degré de liberté, de sorte qu'il sera défini par une seule fonction $q(t)$.

Soit précisément $q = q(t)$ la fonction pour laquelle S a un minimum. Cela signifie que S croît lorsqu'on remplace $q(t)$ par toute fonction de forme

$$q(t) + \delta q(t), \tag{2,2}$$

où $\delta q(t)$ est une fonction petite dans tout l'intervalle temporel de t_1 à t_2 (on l'appelle *variation* de la fonction $q(t)$). Puisque pour $t = t_1$ et $t = t_2$ toutes les fonctions telles que (2,2) doivent prendre les mêmes valeurs $q^{(1)}$ et $q^{(2)}$ on doit avoir:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \tag{2,3}$$

Le changement de valeur de S lorsqu'on remplace q par $q + \delta q$ est donné par la différence:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt.$$

Le développement en série de cette différence suivant les puissances de δq et de $\delta\dot{q}$ (dans l'expression sous le signe somme) commence par des termes du premier ordre. La condition nécessaire de minimum [1] de S est que l'ensemble de ces termes s'annule; on l'appelle première variation (ou habituellement variation tout court) de l'intégrale. Ainsi le principe de moindre action peut être écrit:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt = 0, \tag{2,4}$$

soit en effectuant la variation:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\dot{q} \right) dt = 0.$$

---

[1] En général: d'extremum.

En remarquant que $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$, intégrons le deuxième terme par parties ; nous obtenons :

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q \, dt = 0. \qquad (2,5)$$

En vertu des conditions (2,3), le premier terme de cette expression disparaît. Reste l'intégrale, qui doit être égale à 0 pour toute valeur de δq. Cela n'est possible que si l'expression sous le signe somme s'annule identiquement. Nous obtenons ainsi l'équation

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

S'il y a plusieurs degrés de liberté, les s fonctions différentes $q_i(t)$ doivent varier indépendamment. Il est évident que nous obtenons alors s équations de la forme :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \qquad (2,6)$$

Ce sont les équations différentielles cherchées ; on les appelle en mécanique *équations de Lagrange* [1]. Si la fonction de Lagrange d'un système mécanique donné est connue, alors les équations (2,6) établissent la relation entre les accélérations, les vitesses et les coordonnées, autrement dit constituent les équations du mouvement du système.

Au point de vue mathématique, les équations (2,6) forment un système de s équations différentielles du second ordre à s fonctions inconnues $q_i(t)$.

La solution générale d'un tel système contient $2s$ constantes arbitraires. Pour les déterminer, et par là même pour définir complètement le mouvement du système mécanique, il est nécessaire de connaître les conditions initiales qui caractérisent l'état du système à un instant donné, par exemple les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses.

Soit un système mécanique composé de deux parties A et B, dont chacune, étant fermée, aura respectivement pour fonction de Lagrange les fonctions L_A et L_B. Si alors on éloigne ces parties l'une de l'autre suffisamment pour que leur interaction devienne négligeable, la fonction de Lagrange du système tendra vers la limite

$$\lim L = L_A + L_B. \qquad (2,7)$$

---

[1] Dans le Calcul variationnel, qui envisage le problème formel de la détermination des extrema d'intégrales telles que (2,1), elles sont appelées équations d'Euler.

Cette additivité de la fonction de Lagrange exprime le fait que les équations du mouvement de chacune des parties d'un système n'interagissant pas avec les autres ne peuvent contenir de grandeurs se rapportant aux autres parties du système.

Il est évident que la multiplication de la fonction de Lagrange d'un système mécanique par une constante arbitraire n'influe pas par elle-même sur les équations du mouvement. On pourrait penser qu'il en résulte une indétermination: les fonctions de Lagrange de différents systèmes mécaniques isolés pourraient être multipliées par des constantes quelconques différentes. La propriété d'additivité de la fonction de Lagrange élimine cette indétermination: elle n'admet que la multiplication simultanée des fonctions de Lagrange de tous les systèmes par une constante unique, ce qui aboutit simplement à un arbitraire naturel dans le choix des unités de mesure de cette grandeur physique; nous reviendrons là-dessus au § 4.

On peut faire encore la remarque générale suivante. Considérons deux fonctions $L'(q, \dot{q}, t)$ et $L(q, \dot{q}, t)$ ne différant l'une de l'autre que par la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction quelconque des coordonnées et du temps $f(q, t)$:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \tag{2,8}$$

Calculées à l'aide de ces deux fonctions, les intégrales (2,1) sont liées par la relation

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}\, dt =$$
$$= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1),$$

c'est-à-dire diffèrent l'une de l'autre par un terme supplémentaire qui disparaît lorsqu'on varie l'action. De sorte que la condition $\delta S' = 0$ coïncide avec la condition $\delta S = 0$ et la forme des équations du mouvement reste inchangée.

De cette façon, la fonction de Lagrange n'est déterminée qu'à la dérivée totale d'une fonction quelconque des coordonnées et du temps près.

§ 3. Le principe de relativité de Galilée

Pour étudier les phénomènes mécaniques, il faut choisir un *système de référence*. Dans des systèmes de référence différents les lois du mouvement n'ont pas en général la même forme. Si on prend un système de référence quelconque, il peut se faire que les lois de phénomènes même très simples prennent une forme extrêmement compliquée. Naturellement, on doit choisir un système de référence tel que les lois de la mécanique y soient les plus simples possible.

Par rapport à un système de référence quelconque, l'espace est non homogène et anisotrope. Cela signifie que même si un corps n'interagit avec aucun autre, ses différentes positions dans l'espace et ses différentes orientations ne seront pas équivalentes au point de vue mécanique. Il en sera généralement de même en ce qui concerne le temps, qui sera non uniforme, c'est-à-dire que ses différents instants ne seront pas équivalents. La complication qui serait introduite dans la description des phénomènes mécaniques par ces propriétés de l'espace et du temps est évidente. Ainsi par exemple, un corps libre (c'est-à-dire non soumis à une influence extérieure) ne pourra être au repos: même si la vitesse du corps à un instant quelconque est nulle, à l'instant suivant il commencera à se mouvoir dans une certaine direction. Cependant, on peut toujours trouver un système de référence par rapport auquel l'espace sera homogène et isotrope et le temps uniforme. Un tel système est appelé *galiléen*. En particulier, dans un système galiléen, un corps libre et au repos à un instant donné restera au repos pendant un temps illimité.

Nous pouvons dès maintenant tirer quelques conclusions quant à la forme de la fonction de Lagrange pour un point matériel se déplaçant librement dans un système de référence galiléen. L'uniformité de l'espace et du temps signifie que cette fonction ne peut contenir explicitement ni le rayon vecteur $\mathbf{r}$ du point, ni le temps t; autrement dit, L ne sera fonction que de la vitesse $\mathbf{v}$. Du fait de l'isotropie de l'espace, la fonction de Lagrange ne peut dépendre non plus de la direction du vecteur $\mathbf{v}$, de sorte qu'elle n'est fonction que de sa valeur absolue, c'est-à-dire du carré $\mathbf{v}^2 = v^2$:

$$L = L\,(v^2). \tag{3,1}$$

Etant donné que la fonction de Lagrange est indépendante de $\mathbf{r}$ nous avons $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$, et les équations de Lagrange prennent la forme[1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

d'où $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \text{Cte}$. Mais puisque $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ n'est fonction que de la vitesse, il en résulte que

$$\mathbf{v} = \text{Cte}. \tag{3,2}$$

Nous en arrivons ainsi à la conclusion que dans un système de référence galiléen, tout mouvement libre s'effectue avec une vitesse constante en grandeur et en direction. Cette affirmation constitue ce qu'on appelle la *loi de l'inertie*.

[1] Par dérivée d'une grandeur scalaire par rapport à un vecteur on entend un vecteur dont les composantes sont égales aux dérivées de cette grandeur par rapport aux composantes correspondantes du vecteur.

Si, en plus du système galiléen donné, nous faisons intervenir un autre système animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport au premier, les lois du mouvement dans ce nouveau système seront les mêmes que dans le système initial. Un mouvement libre s'y effectuera aussi à vitesse constante.

Cependant, l'expérience montre que dans ces systèmes non seulement les lois du mouvement libre seront les mêmes, mais que les systèmes seront aussi totalement équivalents au point de vue mécanique. Ainsi, il existe une infinité de systèmes de référence galiléens animés les uns par rapport aux autres d'un mouvement rectiligne et uniforme. Dans ces systèmes, les propriétés de l'espace et du temps sont les mêmes, ainsi que toutes les lois de la mécanique. Cette affirmation constitue ce qu'on appelle le *principe de relativité de Galilée*, qui est un des principes les plus importants de la Mécanique.

Tout ce que nous avons dit démontre assez clairement le caractère particulier des propriétés des systèmes galiléens, propriétés en vertu desquelles on utilise précisément ces systèmes, en général, pour l'étude des phénomènes mécaniques. Par la suite, nous ne considérerons que des systèmes galiléens, sauf indication contraire.

L'équivalence complète au point de vue mécanique de tous ces systèmes montre en même temps qu'il n'existe aucun système de référence « absolu » que l'on pourrait préférer aux autres.

Les coordonnées $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ d'un même point dans deux systèmes de référence différents K et K' dont le deuxième se déplace par rapport au premier avec une vitesse $\mathbf{V}$, sont liées par la relation

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \tag{3,3}$$

On y entend que le temps s'écoule de la même façon dans les deux systèmes de référence:

$$t = t'. \tag{3,4}$$

L'hypothèse d'un temps absolu est à la base même des représentations de la Mécanique classique [1].

Les formules (3,3) et (3,4) sont appelées *transformations de Galilée*. On peut exprimer le principe de relativité de Galilée comme la nécessité de l'invariance des équations du mouvement par rapport à ces transformations.

§ 4. Fonction de Lagrange d'un point matériel libre

Pour déterminer la forme de la fonction de Lagrange, considérons d'abord le cas le plus simple: le mouvement libre d'un point matériel dans un système galiléen. Comme nous l'avons déjà vu,

---

[1] Elle n'est pas vraie en Mécanique relativiste.

la fonction de Lagrange ne dépend dans ce cas que du carré du vecleur vitesse. Pour expliciter cette dépendance, nous utiliserons le principe de relativité de Galilée. Si un système de référence galiléen K se déplace par rapport à un autre système galiléen K' avec une vitesse infiniment petite $\boldsymbol{\varepsilon}$, on a $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$. Puisque les équations du mouvement dans tous les systèmes de référence doivent avoir la même forme, la fonction de Lagrange $L(v^2)$ doit, par cette transformation, se changer en une fonction L', qui, si elle diffère de $L(v^2)$, n'en différera que par la dérivée totale d'une fonction des coordonnées et du temps (voir fin du § 2).

Nous avons

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2).$$

Développant cette expression en série par rapport aux puissances de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, nous obtenons

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Le deuxième terme du second membre de cette égalité sera une dérivée totale par rapport au temps s'il est fonction linéaire de la vitesse $\mathbf{v}$. Par suite, $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ ne dépend pas de la vitesse, c'est-à-dire que la fonction de Lagrange dans le cas envisagé est proportionnelle au carré de la vitesse:

$$L = av^2.$$

Du fait que sous cette forme la fonction de Lagrange satisfait au principe de relativité de Galilée dans le cas d'une transformation infiniment petite de la vitesse, il résulte immédiatement que la fonction de Lagrange est également invariante pour une vitesse finie $\mathbf{V}$ du système de référence K par rapport à K'. En effet,

$$L' = av'^2 = a(\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = av^2 + 2a\mathbf{v}\mathbf{V} + aV^2$$

soit

$$L' = L + \frac{d}{dt}(2a\mathbf{r}\mathbf{V} + aV^2 t).$$

Le second terme est une dérivée totale et peut par conséquent être omis. On désigne habituellement la constante a par $m/2$, de sorte que finalement, la fonction de Lagrange d'un point matériel en mouvement libre s'écrit:

$$L = \frac{mv^2}{2}. \tag{4,1}$$

La grandeur m est appelée *masse* du point matériel. La fonction de Lagrange étant additive, on a, pour un système de points ne