

## CHAPITRE PREMIER

### LE PRINCIPE DE LA RELATIVITÉ

#### § 1. Vitesse de propagation des interactions

Pour pouvoir décrire les phénomènes naturels il est nécessaire de définir un *système de référence*, ou *référentiel*. On entend par système de référence un système de coordonnées permettant d'indiquer les positions spatiales des particules auquel est liée une horloge marquant le temps.

Il existe des systèmes de référence dans lesquels le mouvement libre des corps, i.e. des corps non soumis à l'action des forces extérieures, s'effectue avec une vitesse constante. Ces systèmes sont dits d'*inertie* (*inertiels*).

Lorsque deux référentiels sont animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement rectiligne et uniforme, si l'un d'eux est d'inertie, l'autre le sera aussi (autrement dit, tout mouvement libre dans ce second référentiel sera lui aussi uniforme et rectiligne). Il s'ensuit qu'on peut définir autant qu'on veut de référentiels d'inertie, animés les uns par rapport aux autres de mouvements de translation uniformes.

L'expérience démontre la validité du *principe de la relativité*. Selon ce principe, toutes les lois de la Nature sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie. Cela signifie que les équations qui décrivent les lois de la Nature sont invariantes par rapport aux transformations des coordonnées et du temps lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie à un autre. Il s'ensuit que l'équation décrivant une certaine loi de la Nature en fonction des coordonnées et du temps conserve sa forme dans différents référentiels d'inertie.

En mécanique classique, on décrit l'interaction mutuelle des particules matérielles à l'aide de l'énergie d'interaction potentielle, qui dépend des coordonnées des particules. On se rend facilement compte que ce mode de description des interactions implique l'hypothèse de l'instantanéité des interactions. En effet, les forces qu'exercent sur chacune des particules toutes les autres particules ne dépendent dans ce cas que de la position des particules à l'instant considéré. La variation de la position de l'une des particules se reflète aussitôt sur toutes les autres particules.

Or l'expérience montre que les interactions instantanées n'existent pas dans la Nature. Il s'ensuit que la mécanique fondée sur l'idée de la propagation instantanée des interactions est forcément entachée d'erreur. En réalité, si l'un des corps interagissants subit une certaine modification, cela ne se reflète sur l'autre corps qu'au bout d'un certain intervalle de temps. Ce n'est qu'au bout de cet intervalle de temps que les processus déterminés par cette modification commenceront à se manifester à l'emplacement du second corps. En divisant la distance entre les corps par cet intervalle de temps on trouve la « vitesse de propagation des interactions ».

Remarquons que la vitesse ainsi déterminée pourrait être appelée vitesse maximale de propagation des interactions. Cette vitesse maximale ne caractérise que l'intervalle de temps au bout duquel le changement affectant l'un des corps commencera à se refléter sur l'autre. Il est évident que l'existence d'une vitesse maximale de propagation des interactions implique qu'aucun corps ne peut se déplacer avec une vitesse supérieure à cette vitesse maximale. En effet, si un corps pouvait être animé d'une vitesse supérieure à cette vitesse maximale, ce corps pourrait être utilisé pour transmettre les interactions avec une vitesse supérieure à la vitesse maximale de propagation des interactions.

Bien souvent, l'interaction qui se propage entre les particules est perçue comme un « signal » émis par la première particule pour informer l'autre particule du changement qu'elle a subi. La vitesse de propagation de l'interaction peut alors être appelée « vitesse de propagation du signal ».

L'une des conséquences du principe de relativité est que la vitesse de propagation des interactions est la même dans tous les référentiels d'inertie. Il s'ensuit que la vitesse de propagation des interactions est une constante universelle.

On montrera dans ce qui suit que cette vitesse constante représente aussi la vitesse de propagation de la lumière dans le vide ; c'est pourquoi on l'appelle *vitesse de la lumière*. On la désigne généralement par la lettre *c*. Sa valeur numérique est

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ cm/s.} \quad (1,1)$$

Par suite de la grande valeur de cette vitesse, la mécanique classique fournit des résultats suffisamment précis pour la majorité des besoins pratiques, car les vitesses auxquelles on a généralement affaire sont tellement petites devant la vitesse de la lumière que la précision des résultats ne sera pratiquement pas affectée si l'on pose que cette dernière est infinie.

En associant le principe de relativité à la valeur finie de la vitesse de propagation des interactions on obtient le *principe de relativité d'Einstein* (qui fut énoncé en 1905) qui se distingue du principe de

relativité de Galilée en ce que ce dernier se fonde sur l'idée d'une vitesse infinie de propagation des interactions.

La mécanique fondée sur le principe de relativité d'Einstein (qu'on appellera principe de relativité tout court) est appelée mécanique *relativiste*. A la limite où les vitesses dont sont animés les corps sont petites devant la vitesse de la lumière, on peut négliger l'influence qu'exerce la vitesse finie de propagation des interactions sur le mouvement du corps. Dans ces conditions, la mécanique relativiste se ramène à la mécanique ordinaire fondée sur l'hypothèse de la propagation instantanée des interactions. Cette mécanique est désignée sous le nom de mécanique classique ou newtonienne. Le passage de la mécanique relativiste à la mécanique classique peut être formellement réalisé en posant  $c \rightarrow \infty$  dans les formules relativistes.

En mécanique classique, on admet déjà que l'espace est relatif, autrement dit que les relations spatiales entre des événements distincts dépendent du référentiel utilisé. On ne peut affirmer que deux événements non simultanés ont lieu en un même endroit de l'espace ou, plus généralement, à une distance déterminée l'un de l'autre que si l'on indique le référentiel utilisé.

Par contre, le temps est absolu en mécanique classique, ce qui signifie que les propriétés du temps sont indépendantes du système de référence — le temps est le même dans tous les référentiels. Si un observateur donné constate la simultanéité de deux phénomènes, ces phénomènes seront simultanés pour n'importe quel autre observateur. Plus généralement, l'intervalle de temps entre deux événements donnés doit être le même dans tous les référentiels.

Il est cependant facile de s'assurer que le concept de temps absolu est en contradiction flagrante avec le principe de relativité d'Einstein. Il suffit de se remémorer que la mécanique classique, fondée sur le concept du temps absolu, utilise la loi bien connue de la composition des vitesses; selon cette loi, la vitesse du mouvement composé est égale à la somme (vectorielle) des vitesses composantes de ce mouvement. Comme c'est une loi universelle, elle devrait s'appliquer à la propagation des interactions. On en déduirait que la vitesse de propagation des interactions serait différente dans différents référentiels d'inertie, résultat en désaccord avec le principe de relativité. Mais l'expérience confirme le principe de relativité. Les mesures effectuées initialement par Michelson, en 1881, ont prouvé que la vitesse de la lumière est absolument indépendante de la direction de propagation. Or, selon la mécanique classique, la vitesse de la lumière dans le sens du mouvement de la Terre devrait être différente de celle de sens contraire.

Ainsi, le principe de relativité implique que le temps n'est pas absolu et qu'il s'écoule différemment dans différents systèmes de référence. Il s'ensuit qu'on ne peut affirmer qu'un intervalle de

temps déterminé s'est écoulé entre deux événements que si l'on indique le système de référence concerné. Les événements simultanés dans un certain système de référence ne le sont pas dans un autre système.

Afin de mieux faire comprendre de quoi il s'agit, considérons un exemple simple.

Soient deux systèmes de référence inertiels  $K$  et  $K'$  ayant respectivement pour axes de coordonnées  $xyz$  et  $x'y'z'$ , le système  $K'$  étant en mouvement par rapport à  $K$  suivant le sens positif des axes  $x$  et  $x'$  (fig. 1).

Envoyons du point  $A$ , appartenant à l'axe  $x'$ , des signaux suivant les deux sens de ce même axe. Puisque dans tout système d'inertie, donc dans le système  $K'$ , la vitesse de propagation des signaux est indépendante du sens et égale à  $c$ , les signaux issus de  $A$  parviendront simultanément jusqu'aux points  $B$  et  $C$  équidistants de  $A$  et situés dans le système  $K'$ .

Or, pour un observateur du système  $K$ , ces deux événements (arrivés des signaux aux points  $B$  et  $C$ ) ne seront pas simultanés.

En effet, en vertu du principe de relativité, la vitesse des signaux par rapport au référentiel  $K$  est encore égale à  $c$ , mais comme le point  $B$  se déplace (par rapport au référentiel  $K$ ) à l'encontre du signal issu de  $A$ , et le point  $C$  se déplace dans le même sens que le signal envoyé de  $A$  vers  $C$ , dans le référentiel  $K$  le signal arrivera au point  $B$  avant que l'autre signal parvienne au point  $C$ .

On voit que le principe de relativité d'Einstein modifie profondément les concepts physiques les plus fondamentaux. Nos idées concernant l'espace et le temps, déduites de l'expérience quotidienne, ne sont qu'approchées, car dans notre pratique courante on n'a affaire qu'à des vitesses qui sont petites devant la vitesse de la lumière.

## § 2. Notion d'intervalle

Dans ce qui suit nous aurons souvent recours à la notion d'événement. On caractérise un événement par le lieu et le temps où il s'est produit. Ainsi un événement concernant un point matériel sera défini par les trois coordonnées de ce dernier et par l'instant où il a eu lieu.

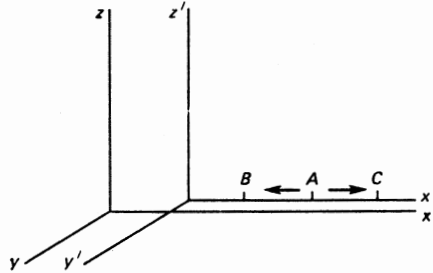


Fig. 1

Afin de bien visualiser les événements, on a souvent recours à un espace quadridimensionnel imaginaire dont les axes sont les trois coordonnées spatiales et le temps. Dans cet espace, l'événement est représenté par un point. Ces points sont appelés *points d'univers*. Dans cet espace quadridimensionnel, à toute particule correspond une ligne (*ligne d'univers*) dont les différents points déterminent ses coordonnées à différents instants. A une particule matérielle animée d'un mouvement rectiligne uniforme correspond une ligne d'univers rectiligne.

Exprimons le principe d'invariance de la vitesse de la lumière sous une forme mathématique. Considérons deux référentiels  $K$  et  $K'$  animés d'un mouvement relatif de vitesse constante. Faisons coïncider les axes  $x$  et  $x'$  et imposons que les axes  $y$  et  $z$  soient parallèles à  $y'$  et  $z'$ . Notons  $t$  et  $t'$  le temps mesuré dans les référentiels  $K$  et  $K'$ .

Supposons que le premier événement consiste en ce que, dans le référentiel  $K$ , du point de coordonnées  $x_1, y_1, z_1$  est émis à l'instant  $t_1$  un signal se propageant avec la vitesse de la lumière. Observons la propagation de ce signal à partir du système  $K$ . Posons que le second événement soit l'arrivée de ce signal au point  $x_2, y_2, z_2$  à l'instant  $t_2$ . Comme le signal se propage avec la vitesse  $c$ , la distance qu'il parcourt est égale à  $c(t_2 - t_1)$ . D'autre part, cette distance est donnée par  $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$ . La dépendance entre les coordonnées des deux événements dans le référentiel  $K$  sera donnée par l'expression :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0. \quad (2,1)$$

On peut observer ces deux événements, i.e. la propagation du signal, à partir du référentiel  $K'$ . Posons que dans ce dernier les coordonnées du premier événement sont  $x'_1, y'_1, z'_1, t'_1$  et celles du second :  $x'_2, y'_2, z'_2, t'_2$ . Comme la vitesse de la lumière est la même dans les référentiels  $K$  et  $K'$ , on peut écrire une expression analogue à (2,1) :

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0. \quad (2,2)$$

Si  $x_1, y_1, z_1, t_1$  et  $x_2, y_2, z_2, t_2$  sont les coordonnées de deux événements quelconques, la quantité

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (2,3)$$

est appelée *intervalle* entre les événements considérés.

Ainsi l'invariance de la vitesse de la lumière implique que si l'intervalle entre deux événements est nul dans un certain référentiel, il sera également nul dans tout autre référentiel.

Lorsque deux événements sont infiniment proches l'un de l'autre l'intervalle  $ds$  entre ces événements est donné par

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2,4)$$

Du point de vue mathématique purement formel, la forme de l'expression (2,3) ou celle de (2,4) permet de considérer l'intervalle comme la distance entre deux points appartenant à l'espace quadridimensionnel imaginaire (le long des axes duquel on porte les coordonnées  $x, y, z$  et le produit  $ct$ ). Il existe cependant une différence essentielle entre la règle de calcul de l'intervalle et les règles géométriques usuelles: dans le calcul du carré de l'intervalle, on fait figurer les carrés des différences des coordonnées suivant les différents axes avec des signes différents et non pas avec le même signe <sup>1)</sup>.

On a montré ci-dessus que si  $ds = 0$  dans un certain référentiel d'inertie,  $ds' = 0$  dans tout autre référentiel d'inertie. D'autre part,  $ds$  et  $ds'$  sont des infiniment petits du même ordre de petitesse. Il s'ensuit que  $ds^2$  et  $ds'^2$  doivent être mutuellement proportionnels

$$ds^2 = a ds'^2.$$

Le facteur  $a$  ne peut être fonction que de la valeur absolue de la vitesse relative des deux référentiels d'inertie et ne peut être fonction des coordonnées et du temps puisque les différents points de l'espace et les différents instants ne seraient pas alors équivalents, comme l'implique l'homogénéité de l'espace et du temps. Ce facteur ne peut dépendre non plus du sens de la vitesse relative, car cela mettrait en défaut l'isotropie de l'espace.

Considérons les trois référentiels  $K, K_1$  et  $K_2$  et soient  $V_1$  et  $V_2$  les vitesses relatives de déplacement des référentiels  $K_1$  et  $K_2$  par rapport à  $K$ . On a alors

$$ds^2 = a(V_1) ds_1^2, \quad ds^2 = a(V_2) ds_2^2.$$

On peut écrire aussi

$$ds_1^2 = a(V_{12}) ds_2^2,$$

où  $V_{12}$  est la valeur absolue de la vitesse de déplacement de  $K_2$  par rapport à  $K_1$ . En identifiant ces expressions on trouve que

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \quad (2,5)$$

Or  $V_{12}$  dépend non seulement des valeurs absolues des vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  mais aussi de l'angle que font ces vecteurs. Mais comme cet angle ne figure pas dans le premier membre de la relation (2,5), on voit que cette dernière ne peut être vérifiée que si la fonction  $a(V)$  se réduit à une constante égale à l'unité.

<sup>1)</sup> La géométrie quadridimensionnelle définie par la forme quadratique (2,4) est dite *pseudo-euclidienne* pour la distinguer de la géométrie ordinaire (euclidienne). Cette géométrie a été introduite par *H. Minkowski* pour les besoins de la théorie de la relativité.

On a donc

$$ds^2 = ds'^2. \quad (2,6)$$

L'égalité d'intervalles infiniment petits implique l'égalité des intervalles finis:  $s = s'$ .

Nous avons établi ainsi un résultat extrêmement important: l'intervalle entre les événements est le même dans tous les référentiels d'inertie, ce qui signifie qu'il est invariant par rapport aux transformations assurant le passage d'un référentiel d'inertie à un autre. L'invariance de l'intervalle est l'expression mathématique de la constance de la vitesse de la lumière.

Notons à nouveau  $x_1, y_1, z_1, t_1$  et  $x_2, y_2, z_2, t_2$  les coordonnées de deux événements dans un référentiel d'inertie  $K$ . Voyons s'il existe un référentiel  $K'$  dans lequel ces deux événements pourront se produire en un même point de l'espace.

Introduisons les notations

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Le carré de l'intervalle entre les événements dans le référentiel  $K$  est alors:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

et dans le référentiel  $K'$  il sera donné par

$$s'_{12}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 - l'_{12}{}^2,$$

et en raison de l'invariance de l'intervalle

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 - l'_{12}{}^2.$$

Nous voulons que dans le référentiel  $K'$  les deux événements aient lieu en un même point, c.-à-d. que  $l'_{12} = 0$ . On doit donc avoir

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 > 0.$$

Ce résultat montre qu'un tel référentiel existe lorsque  $s_{12}^2 > 0$ , i.e. lorsque l'intervalle entre les événements considérés est réel. Les intervalles réels sont dits *intervalles du genre temps*.

Ainsi, lorsque l'intervalle entre deux événements est du genre temps, il existe un référentiel dans lequel les deux événements ont lieu en un même point. Le temps qui s'écoule dans ce référentiel entre les événements est égal à

$$t'_{12} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \quad (2,7)$$

Lorsque deux événements concernent un même corps, l'intervalle entre ces événements est toujours du genre temps. En effet, le chemin que le corps parcourt entre les deux événements ne peut être supérieur à  $ct_{12}$  puisque la vitesse du corps ne peut être supérieure à  $c$ .

On doit donc avoir

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Voyons maintenant si l'on peut trouver un référentiel dans lequel deux événements seraient simultanés. On a à nouveau dans les référentiels  $K$  et  $K'$  :  $c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t'_{12}{}^2 - l'^2_{12}$ . Si l'on impose que  $t'_{12} = 0$ , on aura

$$s_{12}^2 = -l'^2_{12} < 0.$$

On ne peut définir le référentiel cherché que si l'intervalle  $s_{12}$  entre les deux événements est imaginaire. Les intervalles imaginaires sont appelés *intervalles du genre espace*.

Lorsque l'intervalle entre deux événements est du genre espace, il existe un référentiel dans lequel les deux événements ont lieu simultanément. La distance entre les points où se produisent les événements considérés est égale dans ce référentiel à

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2t_{12}^2} = is_{12}. \quad (2,8)$$

La division en intervalles du genre temps et du genre espace a un caractère absolu en raison de leur invariance. Cela signifie que la propriété d'un intervalle d'être du genre temps ou du genre espace est indépendante du système de référence.

Considérons un événement quelconque, que nous appellerons événement  $O$ , et choisissons-le comme origine des coordonnées spatiales et du temps. Cela signifie que dans le système quadridimensionnel,

où on porte sur les axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$ , le point d'univers de l'événement  $O$  représente l'origine des coordonnées. Voyons comment se situent les autres événements par rapport à l'événement  $O$ . Pour fixer les idées, nous n'envisagerons qu'une seule coordonnée spatiale et le temps, qu'on portera le long de deux axes (fig. 2). Le mouvement rectiligne uniforme d'une particule passant par le point  $x = 0$  pour  $t = 0$  sera représenté par une droite passant par  $O$  et faisant avec l'axe  $t$  un angle dont la tangente est égale à la vitesse de la particule. Comme la plus grande vitesse possible est égale à  $c$ , il existe un angle maximal que forme cette droite avec l'axe des  $t$ . On a représenté sur la figure 2 deux droites figurant la propagation en sens opposés de deux signaux (avec la vitesse de la lumière) et

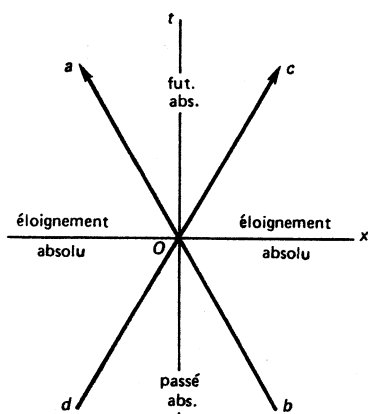


Fig. 2